

Научная статья

УДК 621.37

<https://doi.org/10.25686/2306-2819.2022.2.21>

## Модификация метода Тьюки – Хеннинга оценки спектральной плотности с помощью рекурсивного вычислительного алгоритма в схеме адаптивной фильтрации

Л. Ю. Фадеева<sup>✉</sup>, С. Г. Папазян

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,  
Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Карла Маркса, 10  
[milafadeeva@yandex.ru](mailto:milafadeeva@yandex.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Предлагается рекурсивный вычислительный алгоритм в схеме адаптивной фильтрации, интеграция в который модифицированного метода Тьюки – Хеннинга позволит повысить разрешение оценки спектральной плотности и кардинально изменить результат этой оценки. В основе разработанного авторами алгоритма лежит известный метод прикладной математики – метод деления отрезка пополам, в соответствии с которым диапазон измерений спектральной плотности сужается к окрестностям её пиков.

**Ключевые слова:** спектральная плотность; оценки Блэкмана–Тьюки и Тьюки – Хеннинга; адаптивная фильтрация; автокорреляционная функция; рекурсивный вычислительный алгоритм; аддитивный белый гауссов шум; тригонометрический тренд

**Введение.** С появлением современных систем обработки информации, когда обработку сигнала необходимо проводить в реальном масштабе времени, исследования и разработки в области адаптивной фильтрации сигналов продолжают сохранять свою актуальность. К актуальным задачам относятся задачи коррекции и подавления экзосигналов, многолучевое распространение в высокочастотных системах, обработка речи, цифровые системы связи, широкополосные сети и системы, где наблюдаются эффекты многолучевого распространения. В частности, в работе [1] было показано, что задача снижения влияния аддитивных помех может быть решена адаптацией в частотной области за счёт применения процедуры спектральной обработки входного и эталонного сигналов и оценки их спектральной плотности, что позволяет уменьшить влияние аддитивной помехи на получаемую оценку и повысить эффективность работы си-

стемы. В реальных устройствах зачастую присутствует свой некоррелированный аддитивный широкополосный гауссов шум, который значительно снижает эффективность алгоритма адаптации и работы всей системы фильтрации. В работе [2] рассмотрены методы анализа вероятностных характеристик систем комбинированной обработки сигналов на фоне пассивных помех и предложены два метода обработки сигналов. При этом показана эффективность предложенных методов и адаптивных алгоритмов для анализа систем обработки сигналов. В настоящее время существует достаточно много работ, в которых рассматриваются эффективные алгоритмы, реализующие вычислительные методы в теории чисел, комбинаторике, теории специальных функций, теории спектральных преобразований, основанных на быстром преобразовании Фурье (БПФ) [3]. Приложения рассматриваемых методов очень обширны. Так,

© Фадеева Л. Ю., Папазян С. Г., 2022.

**Для цитирования:** Фадеева Л. Ю., Папазян С. Г. Модификация метода Тьюки – Хеннинга оценки спектральной плотности с помощью рекурсивного вычислительного алгоритма в схеме адаптивной фильтрации // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2022. № 2 (54). С. 21-33. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2022.2.21>

в работе [4] представлен рекурсивный алгоритм Кули–Тьюки вычисления БПФ в системе регистрации и обработки радиокосмофизических данных. Однако унификация различных методов в условиях решаемых задач до сих пор представляет особый интерес.

**Целью** данной работы является повышение эффективности работы адаптивного корректирующего фильтра с помощью разработанного авторами вычислительного алгоритма, являющегося модификацией метода Тьюки – Хеннинга оценки спектральной плотности, встраивание которого в рекурсивный алгоритм приводит не только к обнаружению её новых пиков и к их иной количественной оценке, а также к снижению влияния адаптивного шума, что положительно влияет на качество фильтрации полезного сигнала.

Для достижения основной цели были решены следующие **задачи**: описание и исследование метода Тьюки – Хеннинга; описание вычислительного алгоритма как нового уточняющего метода оценки спектральной плотности, базирующегося на одном из широко известных методов прикладной математики – методе деления отрезка пополам; выявление и количественная оценка пиков спектральной плотности с помощью предлагаемого вычислительного алгоритма, не подлежащих обнаружению методом Тьюки – Хеннинга; применение разработанного авторами алгоритма к случайному сигналу:

$$X(t) = \Psi(t) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где  $\Psi(t)$  – детерминированный сигнал, аппроксимируемый тригонометрическим трендом,  $\varepsilon(t)$  – аддитивный белый гауссов шум (АБГШ); исследование зависимости величины минимума спектральной плотности в «пиковой» частотной полосе от соотношения сигнал/шум.

Ключевым подходом к решению задач, связанных с оценкой спектральной плотности, является формула Винера – Хинчина. Модернизируемый в настоящей

работе метод Тьюки – Хеннинга на самом деле является модификацией метода Блэкмана – Тьюки, который в свою очередь основан на модификации формулы Винера – Хинчина.

Как известно, спектральная плотность случайного сигнала – это функция, показывающая распределение мощности сигнала по частотам [5]. Если корреляционная функция является основной временной характеристикой случайного сигнала, то спектральная плотность (СП) описывает его частотные свойства и похожа на плотность распределения вероятностей, только в отличие от последней она характеризует плотность распределения мощности сигнала по частотам.

Оценка спектральной плотности по методу Блэкмана – Тьюки [6] имеет следующий вид:

$$\hat{S}_{BT}(m) = 4 \cdot \Delta t \sum_{n=1}^{N_{BT}-1} \hat{R}(n) \times w(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N_{BT}}\right), \quad (2)$$

где  $N_{BT} = N/10$  – предел суммирования;  $w(n)$  – оконная функция;  $\hat{R}(n)$  – оценка автокорреляционной функции (АКФ);  $\Delta t$  – интервал дискретизации.

Оценки автокорреляции  $\hat{R}(n)$  могут быть как смещённые, так и несмещённые. В первом случае обеспечивается неотрицательность значений оценок СП. Во втором случае возможны отрицательные значения оценок СП, но сами  $\hat{R}(n)$  обладают лучшими статистическими свойствами.

В свою очередь, К. Грейнджер, лауреат Нобелевской премии 2003 года, специалист в области прогнозирования стационарных процессов, в своей монографии [5] предложил следующие модификации метода Блэкмана – Тьюки: 1) ограничить максимальный сдвиг АКФ по времени числом  $N_{TX} = N/3$ ; 2) в качестве оконной функции использовать окно Хеннинга.

С учётом данных модификаций формула для вычисления оценки спектральной плотности, названная формулой Тьюки – Хеннинга [5], имеет следующий вид:

$$\hat{S}_{TX}(m) = 2 \cdot \Delta t \sum_{n=1}^{N_{TX}-1} \hat{R}(n) \times \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{N_{TX}}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N_{TX}}\right), \quad (3)$$

где  $N_{TX} = N/3$  – предел суммирования;  $m = 0, 1, 2 \dots N_{TX} - 1$ .

Одним из главных преимуществ описываемого метода Тьюки – Хеннинга в отличие от БПФ, который изначально был предназначен для строго периодических функций от времени, состоит в том, что он даёт более широкий подход для изучения смеси регулярности и нерегулярности периодов изучаемого случайного сигнала, включающего переход от суммы некоторого числа синусоидальных последовательностей с почти равными периодами флуктуаций к интегралу от синусоидальных функций, взятому по полосе периодов.

В вышеописанную модификацию метода Блэкмана – Тьюки авторами данной статьи был встроен (интегрирован) вычислительный алгоритм, позволивший не только повысить точность оценки спектральной плотности, но и кардинальным образом изменить её [7].

В основе данного алгоритма лежит метод деления отрезка пополам, в соответствии с которым диапазон измерений сужается к окрестностям пиков спектральной плотности. При этом последовательность чисел  $m$ , определяющая шаг измерения по частоте, задаётся произвольно.

Так, процесс измерений можно разделить на итерации. На первой итерации проводится нахождение оценок СП с большим шагом  $\Delta\omega$  по частоте. Из полученных оценок выбирается максимум (или максимумы, если их несколько), к окрестностям которого сужается диапазон измерений. На второй итерации новый,

суженный диапазон разбивается на такое же (или почти такое же) количество шагов измерения, и снова повторяется уже описанная процедура до тех пор, пока в исследуемых диапазонах не перестанут появляться новые спектральные пики.

Рассмотрим описанную итеративную процедуру применительно к случайному сигналу, описываемому формулой (1).

Аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ)  $\varepsilon(t)$ , присутствующий в формуле (1), является самой распространённой моделью помехи в радиотехнике как минимум по двум причинам: 1) гауссовские процессы являются наиболее изученными и рассмотрение таких моделей является наиболее простым; 2) имеется возможность свести воздействие совокупности различных помех, вносящих разный вклад в помеховую обстановку, к центральной предельной теореме, которая гласит, что в таком случае результирующую помеху можно приближённо рассматривать как АБГШ. По этим причинам в качестве аддитивного шума  $\varepsilon(t)$  в данной работе рассматривается именно АБГШ, который и в дальнейшем сыграет здесь одну из ключевых ролей.

**Методика и результаты моделирования.** Представим формулу (1) в следующем виде:

$$X(t) = A(t) \cdot \sin[2 \cdot (\pi - k) f(t) \cdot t + \varphi(t)] + A(t) \cdot \sin[2 \cdot (\pi + k) f(t) \cdot t + \varphi(t)] + \varepsilon(t), \quad (4)$$

где  $A(t)$ ,  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$  – случайные амплитуда, частота и фаза соответственно, задаваемые соответствующими законами распределения,  $k$  – сдвиг частоты,  $\varepsilon(t)$  – АБГШ. В качестве закона распределения амплитуды случайного сигнала выбрано распределение Рэлея; в качестве функции распределения для частоты было выбрано распределение Максвелла; для фазы случайного сигнала логично и целесообразно было выбрать или равномерное или бета-распределение, так как это распределения, описывающие случайные величины, значения которых ограничены конечным интервалом. Как известно [8], эффект зами-

раний при многолучевом распространении сигнала в радиоканале вызывает в точке приёма флуктуации амплитуды по распределению Рэля и флуктуации фазы по равномерному распределению, поэтому представляет интерес моделирование сигнала с соответствующими флуктуациями.

По формуле (4) видно, что описываемый ею сигнал является суммой двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и начальными фазами, которые отличаются только значениями частот, довольно близкими друг к другу. Во временной области данный сигнал описывается биениями этих частотных составляющих, причём синусоидальная часть соответствует быстро изменяющемуся результирующему колебанию, а косинусоидальная – медленно изменяющейся огибающей этого колебания.

В соответствии с этим было проведено моделирование случайного сигнала с использованием программного пакета LabVIEW® [9]. Модель представляет собой виртуальный прибор (ВП), лицевая панель которого представлена на рис. 1.

В качестве отправной точки исследования статистических характеристик случайного сигнала (4) выступила схема адаптивной фильтрации в частотной области.

Случайный сигнал  $S + n_0 + \epsilon_1$  на входе адаптивного фильтра представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала  $S$  и не коррелированной с ним помехи  $n_0$ , зашумлённой аддитивным белым гауссовским шумом  $\epsilon_1$ . Данные сигналы дискре-

тизируются, а полученные при этом временные отсчёты накапливаются в буфер до тех пор, пока не образуется набор данных длиной  $N$ . Далее происходит перенос сигнала в частотную область, в которой уже и производится процесс адаптации. Выходной сигнал представляет собой результат адаптации, а именно:  $S + \epsilon$ , где  $\epsilon$  – неточность адаптации, весомый вклад в которую вносит АБГШ  $\epsilon_1$  [10].

Предложенный в [7] модифицированный алгоритм оценки спектральной плотности случайного сигнала, будучи применённым в схеме адаптивной фильтрации, способен снизить влияние аддитивного шума  $\epsilon_1$  на качество фильтрации полезного сигнала.

Далее в работе приводится сравнительный анализ характеристик классического и предложенного в [7] модифицированного метода Тьюки – Хеннинга от отношения сигнал/шум анализируемого случайного сигнала, для которого был создан виртуальный прибор для оценок спектральной плотности в среде LabVIEW® [11].

Как известно, только стационарные случайные сигналы допускают спектральное представление, поэтому в данной работе перед построением спектральной оценки проводится проверка исследуемого процесса на стационарность. С этой целью в программной среде LabVIEW® был построен виртуальный прибор проверки случайного сигнала на стационарность, часть лицевой панели которого представлена на рис. 2.

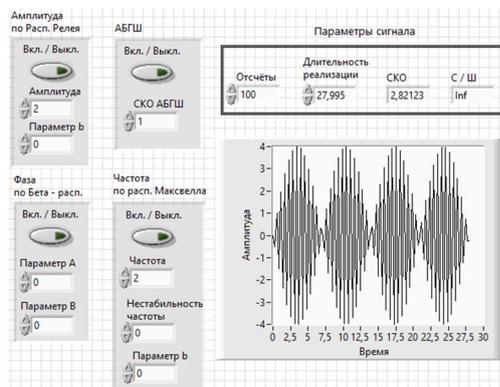


Рис. 1. Лицевая панель ВП модели случайного сигнала  
 Fig. 1. The front panel of the virtual instrument of the random signal model

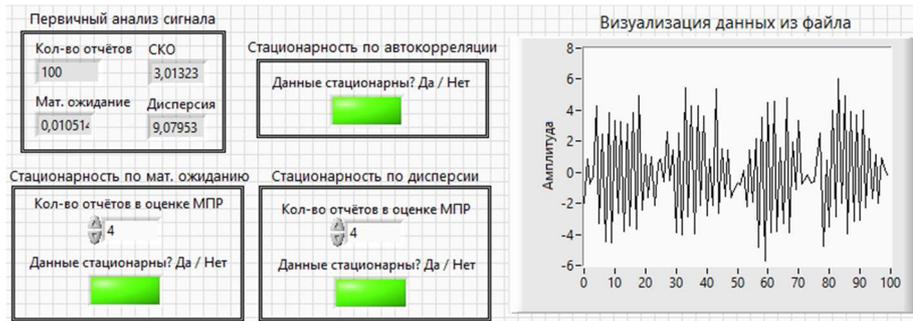


Рис. 2. Лицевая панель ВП модели исследования случайного сигнала на стационарность  
 Fig. 2. The front panel of the virtual instrument of the model for studying a random signal for stationarity

Исследуемый случайный процесс был проверен на стационарность двумя способами: методом последовательных разностей и с помощью коэффициентов авторегрессии, базирующихся на коэффициентах автокорреляции. Оба способа подтвердили стационарность исследуемого сигнала.

С помощью модели сигнала в LabVIEW® была восстановлена автокорреляционная функция (АКФ) исследуемого стационарного сигнала по оценкам автокорреляции, которая вычисляется по формуле:

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{N - m} \times \sum_{n=1}^{N-m} (X(n) - \bar{x}_B) \cdot (X(n+m) - \bar{x}_B), \quad (5)$$

где  $m$  – сдвиг сигнала по времени или по дискретным отсчётам.

В результате расчётов получено тридцать несмещённых оценок  $R(1), R(2), \dots, R(30)$ . Лицевая панель ВП, реализующий автокорреляционную функцию и соответствующий график АКФ, изображён на рис. 3.

Рассмотрим описанную выше итеративную процедуру на примере анализируемого сигнала. Набор анализируемых данных представляет собой  $N = 100$  отсчётов сигнала. Отсюда следует выбор количества используемых в расчётах оценок АКФ, или предела суммирования в (2):  $N_{TX} < N / 3 = 100 / 3$ , где  $N_{TX} = 30$ . Таким образом, для начала вычислений оценок спектральной плотности по формуле Тьюки – Хеннинга необходимо найти 30 оценок автокорреляции анализируемого сигнала по формуле (5), и все они будут использоваться для вычисления каждой из оценок СП. Например, для  $m_2 = 15 / 12$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{TX} \left( \frac{15}{12} \right) = & 2\Delta t \left[ \hat{R}(1) \cdot \left( 1 + \cos \frac{\pi}{30} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{12} + \right. \\ & + \hat{R}(2) \cdot \left( 1 + \cos \frac{\pi}{15} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \\ & + \hat{R}(3) \cdot \left( 1 + \cos \frac{\pi}{10} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \dots + \\ & \left. + \hat{R}(30) \cdot \left( 1 + \cos \frac{30\pi}{30} \right) \cdot \cos \frac{30\pi}{12} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

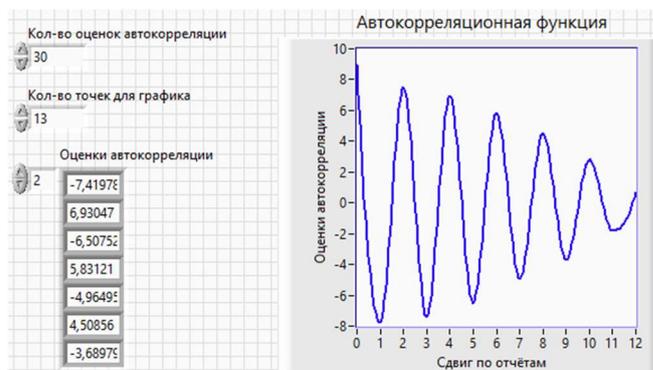


Рис. 3. Автокорреляционная функция анализируемого случайного сигнала  
 Fig. 3. Autocorrelation function of the analyzed random signal

После определения оценок АКФ  $\hat{R}(n)$  были вычислены оценки спектральной плотности мощности (СПМ) с помощью созданного виртуального прибора в среде LabVIEW®.

*Первая итерация.* Пусть имеется такая последовательность чисел  $m = m_1, m_2, m_3 \dots m_M$ , при которой аргумент  $\frac{2\pi \cdot m}{N_{TX}}$  из формулы (6) последовательно изменяется от 0 до  $2\pi$  при переборе значений  $m$ . Для создания такой последовательности нам требуется только лишь задать число  $M$ , которое определяет количество точек измерения на первой итерации. Положим  $M = 12$ , тогда созданная в LabVIEW® модель проводит требуемые вычисления и отображает результаты в виде графика спектральной плотности, измеренной по  $M = 12$  точкам. Данный график показан на рис. 4.

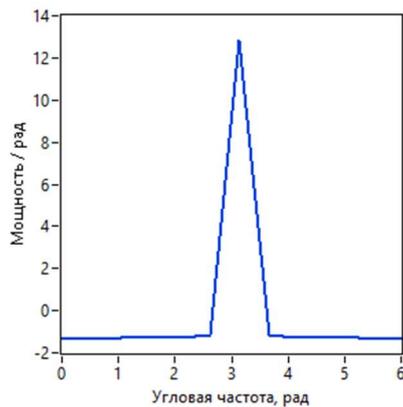


Рис. 4. Спектральная плотность мощности, полученная в результате первой итерации  
Fig. 4. Power spectral density obtained as a result of the first iteration

*Вторая итерация.* Из набора полученных оценок определяется та, которая имеет наибольшее значение. Соответствующую этой оценке угловую частоту обозначим  $\omega_0$ . В её окрестности формируется новый диапазон измерений с границами  $[\omega_0 - \Delta\omega_1; \omega_0 + \Delta\omega_1]$ , где  $\Delta\omega_1$  – шаг измерений на первой итерации (рис. 5, а). По данным значениям границ вычисляется шаг измерений на второй итерации:

$$\Delta\omega_2 = \frac{\omega_0 + \Delta\omega_1 - (\omega_0 - \Delta\omega_1)}{10} = \frac{2\Delta\omega_1}{10}. \quad (7)$$

Затем проводятся вычисления оценок спектральной плотности мощности в новом диапазоне измерений с новым шагом по частоте. Результаты измерений представлены на рис. 5.

*Третья итерация.* Из набора полученных на второй итерации оценок определяются максимальные. Для каждой из них проводится процедура, описанная для второй итерации. Результаты соответствующих измерений представлены на рис. 6. На рис. 6, а показаны границы диапазона измерений для первого максимума, а на рис. 6, б – для второго максимума в ходе третьей итерации.

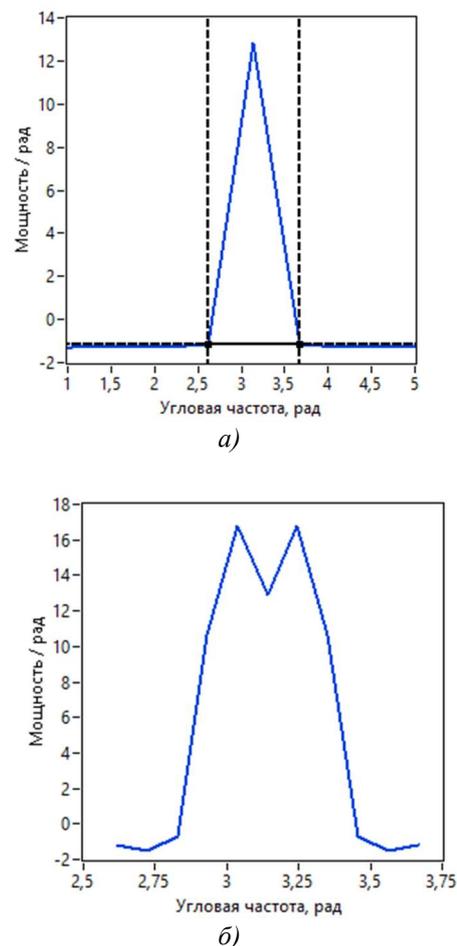


Рис. 5. Спектральные плотности мощности: (а) с выделенным диапазоном измерений для второй итерации; (б) результаты второй итерации

Fig. 5. Power spectral densities: (a) with a dedicated measurement range for the second iteration; (b) results of the second iteration

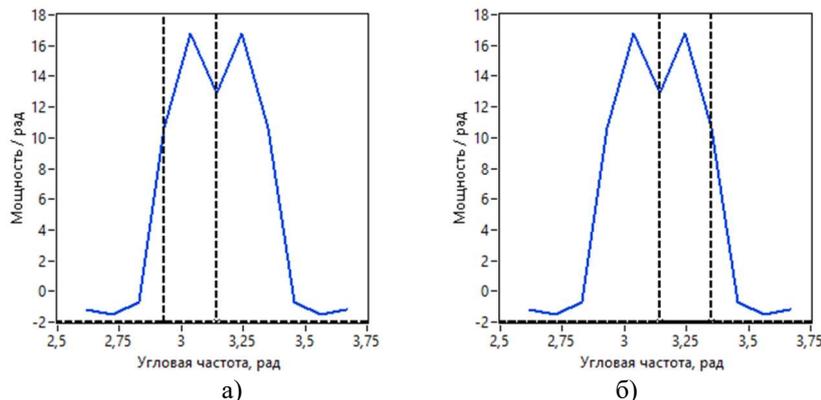


Рис. 6. Спектральные плотности мощности в ходе третьей итерации: (а) с диапазоном измерений для первого максимума; (б) с диапазоном измерений для второго максимума  
 Fig. 6. Power spectral densities during the third iteration: (a) with the measurement range

В ходе следующих итераций не было обнаружено новых максимумов спектральной плотности мощности, поэтому выполнение алгоритма завершается. Все полученные оценки упорядочиваются по своему положению на шкале частот и объединяются в один массив данных, который представляет собой окончательную оценку спектральной плотности мощности анализируемого сигнала, представленную на рис. 7, а. Особо отметим тот факт, что при упомянутом объединении все отрицательные оценки приравниваются к нулю. На рис. 7, б представлены результаты оценки спектральной плотности по классическому алгоритму Тьюки – Хеннинга.

Одной из важных характеристик спектра является его эффективная ширина  $\Delta\omega_{\text{эф}} = \omega_B - \omega_H$ , определяющая полосу

частот, в которой сосредоточено не менее 90 % энергии сигнала. Частота  $\omega_H$  называется нижней, а  $\omega_B$  – верхней граничной частотой сигнала. Существуют разные методы определения данных величин. Например, в работе [12] представлено три метода их определения. Здесь же применим метод, заключающийся в определении  $\omega_H$  и  $\omega_B$  из соотношения:

$$|S(\omega_H)| = |S(\omega_B)| = 0, \quad (8)$$

согласно которому эффективная ширина спектра анализируемого сигнала оказалась равной  $\Delta\omega_{\text{эф}} = 0,628$  радиан. Два других критерия оценки ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{эф}}$ , приведённые в работе [12]: энергетический критерий и критерий заданного уровня приводят к аналогичному результату оценки  $\Delta\omega_{\text{эф}} = 0,628$  радиан.

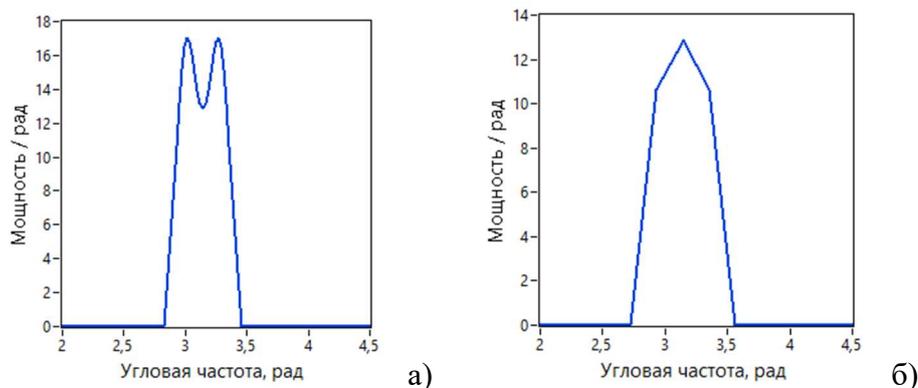


Рис. 7. Спектральные плотности мощности: (а) по предложенному вычислительному алгоритму; (б) по классическому алгоритму Тьюки – Хеннинга  
 Fig. 7. Power spectral densities: (a) according to the proposed computational algorithm; (b) according to the classical Tukey-Hanning algorithm

Итак, результаты, представленные на рис. 7, позволяют установить следующие факты:

1. Оценка спектральной плотности мощности, полученная с помощью предложенного вычислительного алгоритма (рис. 7, а), является более точной по сравнению с оценкой, полученной по классическому алгоритму, (рис. 7, б). Действительно, в первом случае наблюдаются два максимума СПМ со значениями 17,04 условных единиц на нормированных частотах 3,06 и 3,27 радиан, в то время как во втором случае наблюдается только один максимум СПМ со значением 12,87 условных единиц на нормированной частоте 3,14 радиан, что не соответствует действительности для анализируемого сигнала. Отсюда следует заключение о том, что при оценке спектральной плотности сигнала и нахождении её пиков чрезвычайно важно определиться с шагом для частоты, с которым будет проводиться такое оценивание [7].

2. В срединной точке  $\omega = 3,14$  радиан «пикового» интервала нормированных частот спектральная плотность мощности  $\hat{S}_{TX} = 12,87$  условных единиц. Это локальный минимум на «пиковой» частотной полосе  $[\omega_H; \omega_B]$ .

Благодаря данному минимуму становятся различимыми спектральные компоненты анализируемого сигнала.

Исследования, которые приводятся ниже, показывают, что из формулы (4) для

анализируемого случайного сигнала была обнаружена возможность получать разное количество периодов этого сигнала при неизменной длине набора данных  $N = 100$ . Когда в статистике из генеральной совокупности случайным образом извлекается выборка объёмом  $n$ , то невозможно, конечно, по выборке оценить все участки плотности распределения генеральной совокупности, т. е. невозможно оценить бесконечное (несчётное) число точек, если задано только конечное количество информации. Очевидно, что чем большее число точек пытаются оценить, тем больше дисперсия и, следовательно, тем хуже оценка для каждой точки. Та же самая проблема имеет место при оценивании спектра: мы пытаемся оценить среднее значение спектральной плотности на конечном числе частотных полос. В созданной модели существует возможность подбора значений частоты сигнала и длительности реализации, при котором данный эффект имитируется, в то время как количество отсчётов  $N = 100$  остаётся неизменным.

Смоделируем сигналы с четырьмя, пятью и шестью периодами. После этого проведём вычисление спектральных плотностей данных сигналов посредством описанного алгоритма. Результаты проиллюстрируем на рис. 8.

Полученные результаты позволяют заключить, что разрешение данной спектральной оценки прямо пропорционально количеству периодов детерминированного сигнала.

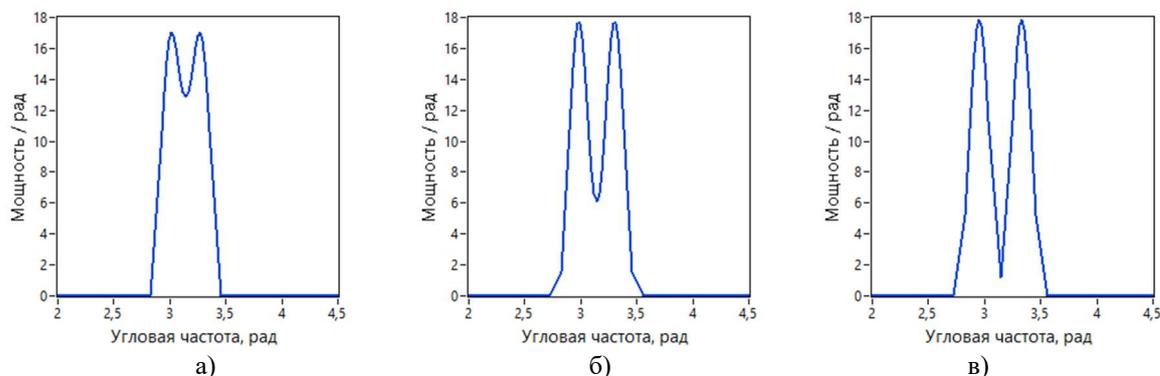


Рис. 8. Спектральные плотности мощностей биений двух гармонических колебаний  
 (а) четырёх периодов; (б) пяти периодов; (в) шести периодов  
 Fig. 8. Spectral power densities of beats of two harmonic oscillations  
 (a) four periods; (b) five periods; (c) six periods

Для определения характеристик анализируемого сигнала было проведено моделирование спектральных плотностей мощности для сигналов с разным числом периодов; разным соотношением сигнал / шум, СКО аддитивной помехи которых варьировалось от 0 до 7,4 условных единиц с шагом в 0,1. Измерения проводились до получения первой необъективной оценки, то есть когда два максимума спектральной плотности становились неразличимыми. Результаты моделирования представлены на рис. 9 в виде зависимости относительной глубины минимум спектральной плотности  $\hat{S}(\pi)$  (в процентах) от соотношения сигнал / шум (SNR):

$$\delta_{\text{ГЛУБ.}} = \frac{\hat{S}(\pi+k) - \hat{S}(\pi)}{\hat{S}(\pi+k)} \cdot 100\%, \quad (9)$$

где  $\delta_{\text{ГЛУБ.}}$  – относительная глубина, %;  $\hat{S}(\pi+k)$  – один из максимумов спектральной плотности.

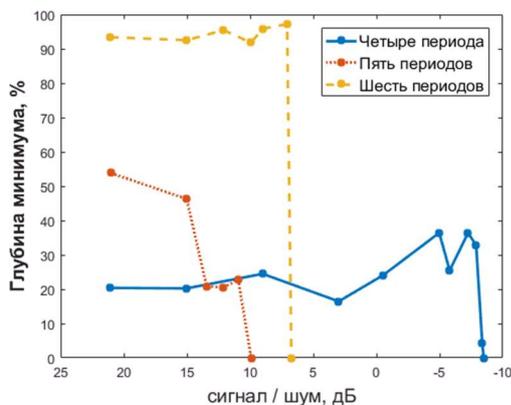


Рис. 9. Зависимость относительной глубины минимум спектральной плотности мощности от соотношения сигнал / шум

Fig. 9. Dependence of the relative depth of the minimum power spectral density on the signal-to-noise ratio

Полученные результаты иллюстрируют тот факт, что наименьшим значением отношения сигнал / шум обладает сигнал, состоящий из четырёх периодов.

На рис. 9 по графику кривой для сигнала с четырьмя периодами видно, что для положительных соотношений сигнал / шум отклонение  $\delta_{\text{ГЛУБ.}}$  от своего

среднего значения в 20 % не превышает 5 %. Для некоторых отрицательных значений соотношения сигнал / шум данное отклонение может достигать 16 %. Это связано с незначительным перетеканием энергии из «пикового» интервала частот в боковые лепестки. Однако подчеркнём, что эти боковые лепестки имеют незначительную величину и представлены всего лишь двумя точками измерения, располагающимися справа и слева от «пикового» интервала.

Отметим также весьма интересный факт, заключающийся в том, что для сигналов с пятью и шестью периодами может быть получена оценка спектральной плотности при меньших соотношениях сигнал / шум, чем граничные значения, показанные на рис. 9. Поэтому подчеркнём, что измерения проводились до получения первой необъективной оценки, за которой вполне может следовать некоторый диапазон значений SNR, в котором оценка спектральной плотности мощности является объективной. Однако эти дополнительные диапазоны всё равно будут входить в границы основного диапазона SNR сигнала с четырьмя периодами.

Из вышесказанного следует вывод о том, что оптимальным сигналом для исследования предложенного алгоритма оценки спектральной плотности является сигнал с четырьмя периодами. Объяснить это можно тем, что такой вариант анализируемого сигнала сочетает в себе необходимую статистику своего протекания во времени и оптимальное число временных отчётов, приходящихся на один период (так как количество отчётов исследованных сигналов было одинаковым и равным  $N = 100$ ).

Данный алгоритм пригоден не только при условии ярко выраженной периодичности исследуемых сигналов, но и для сильно зашумлённых сигналов с вариациями периодов, для которых, в числе прочих, также были получены объективные оценки спектральной плотности.

**Выводы.** Таким образом, в данной работе была доказана оправданность применения модифицированного алгоритма оценки спектральной плотности по методу Тьюки – Хеннинга в схеме адаптивной фильтрации в частотной области. Данный вопрос был рассмотрен в контексте полученных результатов оценки спектральной плотности мощности.

Результаты исследований показали, что оценки спектральной плотности, полученные по предложенному авторами модифицированному методу Тьюки – Хеннинга, обладают следующими преимуществами:

- 1) более точно отражают положение максимумов СПМ на шкале частот, чем стандартный метод Тьюки – Хеннинга;
- 2) обладают низкой чувствительностью своих значений к влиянию АБГШ;
- 3) обеспечивают статистически состоятельную оценку спектральной плотности, мощность которой практически пол-

ностью сосредоточена в пределах «пикового» интервала частот.

**Заключение.** Перечисленные особенности модифицированного метода Тьюки – Хеннинга позволяют сделать вывод о том, что его применение в схеме адаптивной фильтрации в частотной области является оправданной мерой, которая положительно влияет на качество фильтрации полезного сигнала.

В завершение данной работы следует отметить, что применение метода Тьюки – Хеннинга вместе с предложенным авторами вычислительным алгоритмом может оказаться весьма интересным и в других радиотехнических приложениях, например, в задачах спектрального оценивания способов и чистоты обработки поверхностей при разработке различного рода высокоточных датчиков, плёночных и полупроводниковых субмикронных и наноразмерных элементов микроэлектроники, а также при прогнозировании их физических и электрических свойств.

#### Список источников

1. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. М.: Мир, 1988. 392 с.
2. Попов Д.И. Анализ систем комбинированной обработки сигналов на фоне помех // Информатика и космос. 2018. № 2. С. 12-16.
3. Белашов В.Ю., Чернова Н.М. Эффективные алгоритмы и программы вычислительной математики. Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997. 160 с.
4. Белашов В.Ю., Белашова А.А. Реализация алгоритма Кули–Тьюки вычисления БПФ в системе регистрации и обработки радиокосмофизических данных в реальном масштабе времени // Иссл. явлений в ионосфере и магнитосфере Земли. Владивосток: ДВО АН СССР, 1990. 6 с.
5. Грейнджер К., Хатанак М. Спектральный анализ временных рядов в экономике / К.Грейнджер; пер. с англ. В.С. Дудженко, Е.Г.Угер. М.: «Статистика», 1972. 312 с.
6. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с., ил.
7. Фадеева Л.Ю. Спектральный анализ случайных сигналов в радиотехнических задачах. Практикум. Казан. нац. исслед. технический ун-т им. А.Н. Туполева–КАИ. Казань: редакц.-изд. центр «Школа», 2021. 156 с.
8. Фокин Г.А. Моделирование многолучевого радиоканала // Информационные технологии и телекоммуникации. 2021. Т. 9, № 1. С. 59-78.
9. Папазян С.Г. Моделирование случайных сигналов для систем радиосвязи // XXV Туполевские чтения (школа молодых учёных): Материалы конф. Сборник докладов (Казань, 10–11 ноября 2021 г.). Казань: Индивидуальный предприниматель Сагиева А.Р., 2021. Т.6. С. 230-233.
10. Мусихин В.И. Применение полиспектральной обработки в адаптивной фильтрации // Ural Radio Engineering Journal. 2018. Т. 2, № 3. С. 32-42.
11. Папазян С.Г. Модифицированный метод оценки спектральной плотности случайного сигнала // Прикладная электродинамика, фотоника и живые системы – 2022: Материалы конференции (Казань, 28–30 апреля 2022 г.). Казань: ИП Сагиева А.Р., 2022. С. 131-132.
12. Бойко Б.П., Тюрин В.А. Спектр сигнала: учебно-методическое пособие. Казань: Казанский федеральный университет, 2014. 38 с.

Статья поступила в редакцию 06.05.2022; одобрена после рецензирования 30.05.2022; принята к публикации 15.06.2022

### Информация об авторах

*ФАДЕЕВА Людмила Юрьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных и телекоммуникационных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ. Область научных интересов – исследование многомерных сред с распределёнными параметрами; электродинамическое моделирование радиотехнических систем; автоматизированные системы управления, диагностики и контроля в линиях связи и антенных системах; диагностическое оборудование в радиотехнике. Автор 50 научных публикаций, двух монографий, четырёх патентов на изобретения.

*ПАПАЗЯН Самвел Геворкович* – магистр кафедры радиоэлектронных и телекоммуникационных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева. Область научных интересов – моделирование радиотехнических систем, автоматизированные системы управления в линиях связи. Автор двух научных публикаций.

#### **Вклад авторов:**

*Фадеева Л. Ю.* – изложение основной идеи и способа её реализации.

*Папазян С. Г.* – реализация вычислительного алгоритма.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Scientific article

UDC 621.37

<https://doi.org/10.25686/2306-2819.2022.2.21>**Modification of the Tukey – Henning Method of Spectral Density Estimation Using a Recursive Computational Algorithm in an Adaptive Filtering Scheme****L. Yu. Fadeeva** , **S. G. Papazyan**Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI,  
10, K.Marx St., Kazan, 420111, Russian Federation  
[milafadeeva@yandex.ru](mailto:milafadeeva@yandex.ru) **Keywords:** spectral density; Blackman-Tukey and Tukey-Henning estimates; adaptive filtering; autocorrelation function; recursive computational algorithm; additive white Gaussian noise; trigonometric trend**ABSTRACT**

**Introduction.** With the advent of modern information processing systems, when signal processing needs to be carried out in real time, research and development in the field of adaptive signal filtering continue to keep relevance. Current tasks include correction and suppression of echo signals, multipath propagation in high frequency systems, speech processing, digital communication systems, wideband networks and systems where multipath effects are observed. In particular, it was previously shown that the problem of reducing the influence of additive interferences can be solved by adaptation in the frequency domain by applying the procedure of spectral processing of input and reference signals and estimating their spectral density. This processing reduces the influence of additive interferences on the resulting estimate and increases the efficiency of the system. Real devices often have their own uncorrelated additive wideband Gaussian noise, which significantly reduces the efficiency of the adaptation algorithm and the operation of the entire filtering system. However, the unification of various methods in the conditions of the posed tasks is still topical. **Objective.** The aim of this work is to increase the efficiency of the adaptive correction filter using the computational algorithm developed by the authors, which is a modification of the Tukey – Henning method for estimating spectral density, the embedding of which in the recursive algorithm leads not only to the detection of its new peaks and to their other quantitative estimation, but also to a reduction in the influence of adaptive noise, which positively affects the quality of filtering the useful signal. **The key approach to solving the problems** related to spectral density estimation is the Wiener-Khinchin formula. The Tukey-Hanning method modernized in this research is a modification of the Blackman-Tukey method, which in turn is based on a modification of the Wiener-Khinchin formula. The authors added (integrated) a computational algorithm into the modification of the Tukey-Hanning method, which allowed not only to improve the accuracy of the spectral density estimate, but also to radically change it. This algorithm is based on the method of dividing the segment in half, according to which the measurement range is narrowed to the vicinity of the peaks of the spectral density. In this case, the sequence of numbers  $m$ , which determines the frequency measurement step, is set randomly. **Methodology and findings of the experiment.** The proposed algorithm was studied in relation to a random signal, the model of which is the sum of two harmonic oscillations with the same amplitudes and initial phases, which differ in frequency values close to each other. The experiment was carried out using simulation in the LabVIEW framework. With the use of the signal model in LabVIEW, the autocorrelation function of the studied signal was restored according to autocorrelation estimates. The described iterative procedure is considered on the example of the analyzed signal. Estimates of the power spectral density are obtained using the proposed computational algorithm. It was shown that the obtained estimates are more accurate compared to the classical Tukey–Henning algorithm: they reflect the power level of the spectral components of the useful signal as objectively as possible; they have low sensitivity of their values to the influence of additive white Gaussian noise. **Conclusions.** The discussed features of the modified Tukey–Henning method allow us to conclude that its use in the adaptive filtering scheme in the frequency domain is a reasonable measure that positively affects the filtering quality of the useful signal. The application of the Tukey–Henning method together with the computational algorithm proposed by the authors seems promising in other radio engineering applications, for example, in problems of spectral estimation of methods and purity of surface treatment in the development of various kinds of high-precision sensors, film and semiconductor submicron and nanoscale microelectronics elements, as well as in predicting their physical and electrical properties.

## REFERENCES

1. Adaptivnye filtry: Per. s angl./Pod red. K. F. N. Koujena i P. M. Granta [Adaptive filters: Transl. from English / Ed. C. F. N. Cowan and P. M. Grant]. Moscow, Mir, 1988. 392 p. (In Russ.).
2. Popov D.I. Analiz sistem kombinirovannoj obrabotki signalov na fone pomeh [Analysis of combined signal processing systems against the background of noise]. *Informacija i kosmos* [Information and Space]. 2018. No 2. P. 12-16. (In Russ.).
3. Belashov V.Ju., Chernova N.M. *Jeffektivnye algoritmy i programmy vychislitel'noj matematiki* [Efficient Algorithms and Computational Mathematics Programs]. Magadan, NECRI FEB RAS, 1997. 160 p. (In Russ.).
4. Belashov V.Ju., Belashova A.A. Realizacija algoritma Kuli-T'juki vychislenija BPF v sisteme registracii i obrabotki radiokosmofizicheskikh dannyh v real'nom mashtabe vremeni [Implementation of the Cooley-Tukey fft calculation algorithm in the system for recording and processing radiocosphysical data in real time]. *Issl. javlenij v ionosfere i magnitosfere Zemli* [Research phenomena in the ionosphere and magnetosphere of the Earth]. Vladivostok, FEB AS USSR, 1990. 6 p. (In Russ.).
5. Granger K., Hatanaka M. *Spektral'nyj analiz vremennyh rjadov v jekonomike* / per. s angl. V.S. Dudzhenko, E.G.Uger. [Spectral analysis of time series in economics / tr. From English V.S. Dudzhenko, E.G. Uger.]. Moscow, Statistika, 1972. 312 p. (In Russ.).
6. Marple Jr. S.L. *Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozhenija: Per. s angl.* [Digital spectral analysis and its applications: Tr. from English]. Moscow, Mir, 1990. 584 p. (In Russ.).
7. Fadeeva L.Yu. *Spektral'nyj analiz sluchajnyh signalov v radiotekhnicheskikh zadachah. Praktikum.* Kazan. nac. issled. tehničeskij un-t im. A.N. Tupoleva-KAI. [Spectral analysis of random signals in radio engineering problems. Workbook. Kazan. nat. research tech. uni. named after A.N. Tupolev-KAI]. Kazan, editorial and publishing center "Shkola", 2021. 156 p. (In Russ.).
8. Fokin G.A. Modelirovanie mnogoluchevogo radiokanala [Modeling multi-beam radio channel]. *Informacionnye tehnologii i telekommunikacii* [Information technologies and telecommunications]. 2021, Vol. 9. No 1. P. 59-78. (In Russ.).
9. Papazyan S.G. Modelirovanie sluchajnyh signalov dlja sistem radiosvjazi [Modeling of random signals for radio communication systems]. *XXV Tupolevskie chtenija (shkola molodyh uchjonyh): Materialy konf. Sbornik dokladov* (Kazan', 10–11 nojabrja 2021 g.) [XXV Tupolevskie chtenija (young scientists school): Proceedings of the conference (Kazan, 10-11 November 2021)]. Kazan: Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 2021. Vol. 6. P. 230-233. (In Russ.).
10. Musikhin V.I. Primenenie polispektral'noj obrabotki v adaptivnoj fil'tracii [Polyspectral processing in adaptive filtering]. *Ural radio engineering journal*. 2018. Vol. 2. No 3. P. 32-42. (In Russ.).
11. Papazyan S.G. Modificirovannyj metod ocenki spektral'noj plotnosti sluchajnogo signala [Modified method for estimating the spectral density of a random signal]. *Prikladnaja jelektrodinamika, fotonika i zhivye sistemy – 2022: Materialy konferencii (Kazan', 28–30 aprelya 2022 g.)* [Applied electro-dynamics, photonics and living systems – 2022: Conference proceedings (Kazan, 28-30 April 2022)]. Kazan: Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 2022. P. 131-132. (In Russ.).
12. Boyko B.P., Tyurin V.A. *Spektr signala: uchebno-metodicheskoe posobie* [Signal spectrum: teaching aid]. Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University, 2014. 38 p. (In Russ.).

The article was submitted 06.05.2022; approved after reviewing 30.05.2022; accepted for publication 15.06.2022

**For citation:** Fadeeva L. Yu., Papazyan S. G. Modification of the Tukey – Henning Method of Spectral Density Estimation Using a Recursive Computational Algorithm in an Adaptive Filtering Scheme. *Vestnik of Volga State University of Technology. Ser.: Radio Engineering and Infocommunication Systems*. 2022. No 2 (54). Pp. 21–33. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2022.2.21>

## Information about the authors

*Lyudmila Yu. Fadeeva* – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Institute for Radio-Electronics and Telecommunications of Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI. Research interests – multidimensional media with distributed parameters, electrodynamic modeling of radio engineering systems, automated control systems, diagnostics and control in communication links and antenna systems, diagnostic equipment in radio engineering. The author of 50 scientific publications, 2 monographs, 4 invention patents.

*Samvel G. Papazyan* – Master Student at the Institute for Radio-Electronics and Telecommunications of Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI. Research interests – modeling of radio engineering systems, automated control systems in communication links. The author of 2 scientific publications.

## Contribution of authors:

*Fadeeva L. Yu.* – presentation of the main idea and the method of its implementation.

*Papazyan S. G.* – implementation of a computational algorithm.

Authors declare that they have no conflict of interest.

All authors read and approved the final manuscript.