

ISSN 2415-7996

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Центр фундаментального образования

НАУЧНОМУ ПРОГРЕССУ – ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЫХ

Материалы
XIV международной молодежной научной конференции
по естественнонаучным и техническим дисциплинам

Йошкар-Ола, 19-20 апреля 2019 года

Часть 1

Йошкар-Ола
ПГТУ
2019

УДК 378.147.88

ББК 74.58

Н 34

Редакционная коллегия

Д. В. Иванов, член-корреспондент РАН, д-р физ.-мат. наук; профессор;

С. Г. Кудрявцев, канд. техн. наук, доцент;

Э. В. Унженина, специалист по учебно-методической работе ЦФО;

В. Е. Шебашев, канд. техн. наук, профессор

Научному прогрессу – творчество молодых: материалы XIV
Н 34 международной молодежной научной конференции по естественно-
научным и техническим дисциплинам (Йошкар-Ола, 19-20 апреля
2019 г.): в 4 ч. / редкол.: Д. В. Иванов [и др.]. – Йошкар-Ола: По-
волжский государственный технологический университет, 2019. –
Ч. 1. – 236 с.

Представлены результаты научно-исследовательских работ молодых ученых, аспирантов и студентов по секциям «Математика», «Теоретическая и экспериментальная физика», «Прикладная механика», «Строительная механика и теория сооружений», «Прикладная геометрия и компьютерная графика».

УДК 378.147.88

ББК 74.58

ISSN 2415-7996

© Поволжский государственный
технологический университет, 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ

Новые технологии и подходы к организации производства на основе широкого использования последних достижений науки и техники предъявляют сегодня высокие требования к уровню подготовки инженерно-технических кадров. Подготовка в вузах квалифицированных специалистов, способных быстро воспринимать и аккумулировать новые идеи, искать и создавать новейшие технологии, эффективно их внедрять в промышленное производство, может быть на практике реализована на основе совмещения инновационных технологий в образовании с интенсивной научно-исследовательской деятельностью обучаемых. Поэтому привлечение обучающихся к научно-исследовательской работе, которая требует повседневного напряженного труда, мобилизации интеллектуальных и нравственных сил, позволит сформировать у них определенный набор компетенций для дальнейшей практической деятельности.

Акцент при совместной работе преподавателя и студентов, необходимо переносить на самостоятельную творческую работу обучающихся, направленную на решение конкретных научных задач или доведение до практического применения научных или технологических достижений, что является основой для формирования у них нестандартного мышления, инновационной культуры, позволит минимизировать рассогласование между образовательной подготовкой и реальными требованиями современного производства.

XIV Международная молодежная конференция по естественно-научным и техническим дисциплинам, которая прошла 19-20 апреля 2019 года на базе Центра фундаментального образования Поволжского государственного технологического университета, и была направлена на привлечение талантливой молодежи к научным исследованиям, полноценному, гармоничному ее развитию и воспитанию, формированию у нее инновационной культуры, развитию творческих компетенций.

Представители молодого поколения из многих вузов, научно-исследовательских институтов Российской Федерации, стран ближнего и дальнего зарубежья приняли участие в ее работе. Присутствовали большие студенческие делегации из Брянска, Казани, Москвы, Чебоксар.

Работа конференции была организована в 21 секции, на которых было заслушано около 400 докладов. Названия секций соответствовали приоритетным направлениям деятельности научных школ ПГТУ. Работу сек-

ций курировали ведущие в соответствующих областях науки ученые ПГТУ и других вузов России. По представлению руководителей секций лучшие доклады отмечены дипломами соответствующей степени.

Работа конференции позволила:

- оценить уровень подготовки молодых исследователей с позиций их общего образовательного уровня, технической грамотности, инженерного мышления;

- провести независимую, объективную экспертизу работ, выполненных представителями разных научных школ;

- выявить и отметить наиболее одаренных, креативных участников с целью их мотивации, стимулирования для дальнейшего творческого роста и подготовки резерва научно-педагогических и научных кадров;

- привлечь внимание представителей промышленности и бизнеса к научно-техническим разработкам молодежи.

При подведении итогов работы конференции было отмечено благоприятное отношение молодежи к научно-техническому творчеству, ее огромный интеллектуальный потенциал, который в дальнейшем целесообразно направить на решение новых научных и прикладных задач.

По результатам конференции выпускается сборник материалов в 4 частях. В данной части представлены секции: «Математика», «Теоретическая и экспериментальная физика», «Прикладная механика», «Строительная механика и теория сооружений», «Прикладная геометрия и компьютерная графика».

Оргкомитет выражает искреннюю признательность участникам конференции, их научным руководителям за высокий уровень представленных докладов. Особая признательность руководителям секций за процедуру отбора и квалифицированную, доброжелательную оценку полученных материалов. Редакционная коллегия сборника благодарит всех, кто предоставил статьи для публикации и кто помогал готовить их к публикации.

Желаем всем творческих успехов и удачи в достижении поставленных перед собой целей.

Проведение XV конференции по традиционной тематике аналогично планируется на апрель 2020 года. До новых встреч.

Директор центра
фундаментального образования ПГТУ
С. Г. Кудрявцев

УДК 531. 1

Андрианов Д. Ю., Фищенко П. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПЕРЕВОДА СИСТЕМЫ В ОЧЕРЕДНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ СОХРАНЕНИИ «СТАЦИОНАРНОГО СВОЙСТВА»

Аннотация. Определен алгоритм последовательного перевода системы условий в очередное состояние, обеспечивающее устойчивость беспилотной транспортной платформы.

Ключевые слова: алгоритм последовательного перевода системы условий в очередное состояние, беспилотная транспортная платформа.

Актуальность. Освоение северных территорий предполагает разработку новых технологий, включая создание беспилотной транспортной платформы со смещаемым центром тяжести [1], содержащей систему обеспечения устойчивости, которая представляет собой несущее опорно-поворотное устройство [2].

Цель работы заключается в применении алгоритма последовательного перевода системы из текущего состояния в очередное состояние **при сохранении «стационарного свойства системы»**. «Стационарным свойством системы» является исключение захода (свойство С) платформы в две опасные зоны, то есть исключение бокового опрокидывания (условия А) и уход от столкновения с препятствием (условия В).

Теория и методы. Пусть имеются последовательность A_1, A_2, \dots, A_n условий типа А и последовательность B_1, B_2, \dots, B_n типа В. Система, находящаяся в этих условиях, приобретает свойство типа С тогда, когда выполняются одновременно «пары условий», причём это пары «соседних по номеру» условий, например, $\{A_1, B_1\}$, $\{A_1, B_2\}$, $\{A_2, B_2\}$, $\{A_3, B_2\}$, $\{A_3, B_3\}$, $\{A_3, B_4\}$, $\{A_4, B_4\}$, и т. д. (рис. 1). При выполнении каждой из пар условий, система может находиться последовательно в двух состояниях: либо $F_{ij} \rightarrow F_{ij+1}$, либо $F_{ij} \rightarrow F_{i+1,j}$. При этом каждое последнее состояние имеет место и при выполнении очередной пары условий. Последовательность появлений и снятий пар условий в предлагаемом алгоритме представлена на рис. 1.

Введём следующее понятие. Стационарным свойством системы называется такое свойство C , которое при изменении состояний системы остаётся постоянно имеющим место (выполняющимся). Если система неизменно обладает некоторым свойством при последовательных изменениях состояний системы, то свойство является стационарным.

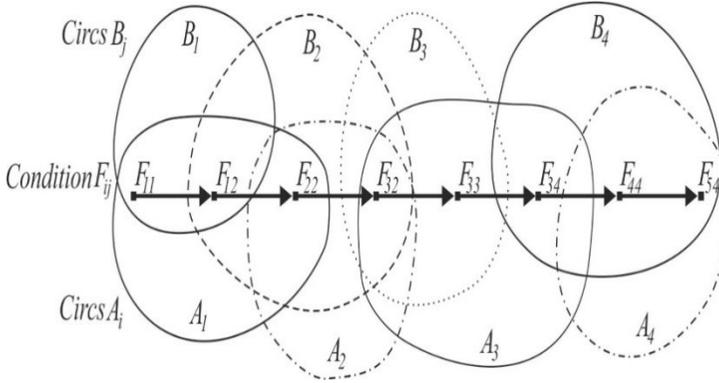


Рис. 1. Алгоритм перехода в очередное состояние экосистемы

Требуется обеспечить такое изменение условий и такие переводы системы из состояния в очередное состояние, чтобы заданное свойство C системы выполнялось непрерывно, являясь «Стационарным свойством системы».

Чтобы система обладала свойством C , предлагается следующий алгоритм (способ) перехода в очередное состояние.

Сначала на платформу накладываются условия $\{A_1, B_1\}$, и система, попадая в состояние F_{11} , приобретает свойство C , которое в дальнейшем она не должна потерять (рис. 1 и рис. 2). Так как при каждой «паре условий» платформа может находиться последовательно в двух состояниях, систему следует перевести во «второе» состояние F_{12} , не снимая условий $\{A_1, B_1\}$. К имеющимся условиям добавляются условия $\{A_1, B_2\}$. Так как «второе» состояние системы имеет место и при условиях $\{A_1, B_2\}$ и при этих же условиях существует очередное состояние, то сначала добавляются условия $\{A_2, B_2\}$, а затем систему следует перевести в «третье» состояние F_{22} . Теперь условия $\{A_1, B_1\}$ снимают.

Процесс продолжается аналогично.

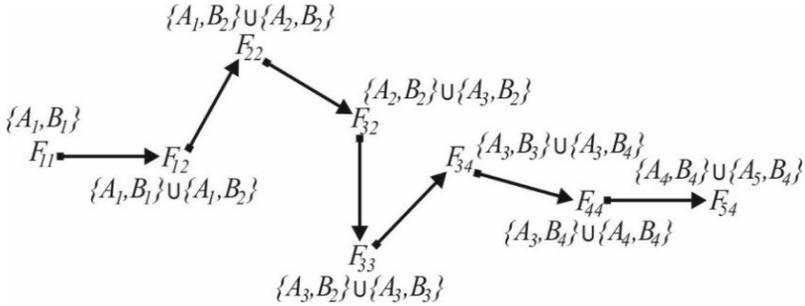


Рис. 2. Порядок появления и снятия «пар условий» и соответствующих им состояний системы

Так как каждый раз на систему наложена какая-нибудь из «соседних» пар условий, то обладание объекта свойством С обеспечено.

Данный алгоритм реализован в задаче обеспечения безопасной эксплуатации беспилотной снегоходной транспортной платформы. При этом «стационарным свойством системы» является исключение захода объекта в две опасные зоны, то есть исключение бокового опрокидывания и уход от столкновения с препятствием.

Литература

1. Андрианов, Д. Ю. Предпосылки создания современной техники для освоения и социально-экономического развития Арктики / Д. Ю. Андрианов, П. А. Фищенко, И. А. Кудрявцев // Россия в многовекторном мире: национальная безопасность, вызовы и ответы. XX Вавиловские чтения: материалы международной междисциплинарной научной конференции: в 2 ч. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2017. – Ч. 2. – С. 40-42.
2. Беспилотная снегоходная транспортная платформа со смещаемым центром тяжести: патент на полезную модель № RU159557 / Кудрявцев И. А., Егоров А. В., Андрианов Ю. С., Андрианов Д. Ю., 2015.
3. Андрианов Д. Ю. Форма опасных зон при движении беспилотной транспортной платформы / Д. Ю. Андрианов, П. А. Фищенко // Труды Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Технологическая. – 2017. – № 5. – С. 209-306.

Борисова М. К.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В АРХИТЕКТУРЕ

Аннотация. Представлена значимость золотого сечения в различных науках, в том числе в строительстве.

Ключевые слова: золотое сечение, математика, архитектура.

Во все времена люди пытались находить закономерности в окружающем их мире. Окружали себя предметами «правильной», с их точки зрения, формы. Лишь с развитием математики людям удалось измерить «золотое соотношение», которое впоследствии получило название «Золотое сечение». Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или, другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему. Приблизительная его величина – 1,6180339887. В округленном процентном значении пропорции частей целого будут соотноситься как 62 % на 38 %. Золотое сечение – это универсальное проявление структурной гармонии. Оно встречается в природе, науке, искусстве – во всем, с чем может соприкоснуться человек.

В математике, помимо основного закона, касающегося соотношения отрезков, примером золотого сечения является ряд Фибоначчи. Это такая последовательность чисел, при которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т. д. При этом отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого сечения.

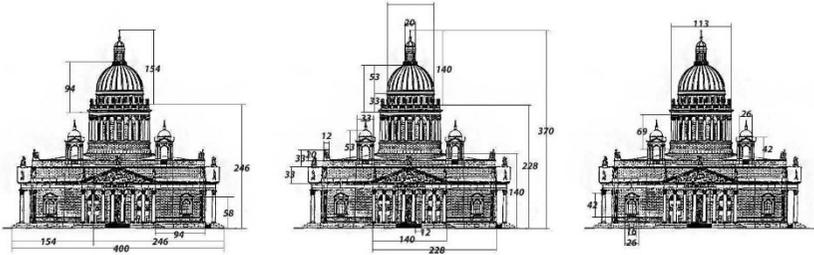
Большое значение золотое сечение имеет в архитектуре. Все важные особенности будущего здания должны быть заложены в него еще на стадиях проектирования. Планирование строительства по золотому сечению начинается с определения главного модуля здания, который будет выступать условной единицей. Именно к нему впоследствии будут привязаны все остальные размеры объекта, и с его учетом будет разделяться внутреннее пространство объекта на секции.

Множество построек древности, которые сохранились до сих пор, служат подтверждением тому, что архитекторы из эпохи средневековья

были знакомы с гармоническим правилом. Очень хорошо заметно стремление соблности гармоническую пропорцию при сооружении церквей, значимых общественных зданий, резиденций королевских особ.

Естественно, дома с таким отношением частей возводили и до открытия правила золотого сечения. Например, к таким зданиям относится церковь Покрова на Нерли.

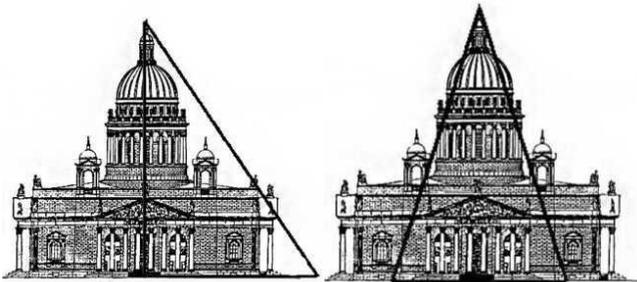
Живым примером золотого сечения является Исаакиевский собор.



Первый ряд определён шириной здания, которая принята за 400 ед. и представляет такие цифры 400, 247, 153, 94, 58...Если 400 разделим на число $\approx 1,618$, то получим приблизительно 247; повторяем действие со следующим числом: $247: 1.618 \approx 153$.И так находим все числа. Теперь смотрим на рисунок. Основная часть с колоннами вписывается в прямоугольник со сторонами 400 и 247. Поскольку стороны находятся в соотношении $\Phi \approx 1.618$, то они образуют Золотой прямоугольник.

Следующий ряд представлен высотой здания: 370, 228, 140, 87, 53, 33, 20. Эти размеры заложены в более мелкие детали. По вертикали Исаакиевский собор делится Золотым сечением у основания купола, что делает соотношение основной части и купола гармоничным.

Третий ряд размеров начинается со 113, и являет ширину основания



главного купола: 113, 69, 42, 26, 16. Числа этого ряда встречаются в размерах окон, в высотах колонн и других деталей собора.

Золотые прямоугольный и равнобедренный треугольники имеют место в здании Исаакиевского собора, как видно из рисунка.

В течение многих столетий золотое сечение является основой архитектуры, живописи и других искусств. Золотое сечение – это природная гармония, пропорциональность, найти которую можно в самых разных живых структурах – в рисунке волокон дерева, в расположении лепестков цветов, в строении раковин и человеческого тела. Именно поэтому с самых древних времен человечество стремится использовать эту гармонию в повседневной жизни, в том числе и в архитектуре.

Литература

1. <http://arx.novosibdom.ru/node/419>.
2. <https://arhi1.ru/ob-arhitekture/nauka/zolotoe-sechenie>.

УДК 501

Васильев Е. С.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСХОДУЕМОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ КОНСТРУКЦИИ

Аннотация. Представлен поэтапный разбор оптимизации расходуемого материала на примере задачи.

Ключевые слова: оптимизация, уравнение, расход.

Оптимизация – в математике, информатике и исследовании операций – задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

I этап. *Составление математической модели.*

1. Исследовав условия задачи, выделим оптимизируемую величину, т. е. такую величину, наибольшее или наименьшее значение которой необходимо найти. Обозначим ее буквой y (или S , R , V – в зависимости от содержания задачи).

2. Одну из неизвестных величин, заданных в задаче, через которую проще всего выразить оптимизируемую величину, примем за независимую переменную и обозначим ее буквой x (или какой-либо другой буквой). Зададим реальные границы изменения независимой переменной в соответствии с условиями задачи.

3. Исходя из условия, выразим y через x . Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X , которую нашли на втором шаге.

II этап. *Работа с составленной моделью.*

В этом этапе для функции $y = f(x)$, найдите y_{\min} или y_{\max} в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические знания, которые мы рассмотрели при нахождении \max и \min значений функции.

III этап. *Ответ на вопрос задачи.*

На этом этапе следует получить конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью. Записать ответ в терминах предложенной задачи.

Рассмотрим задачу на оптимизацию

Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку для того, чтобы скрепить несколько таких балок вместе и получить кровельную конструкцию такую, чтобы количество отходов было наименьшим.

Задачу можно свести к следующей: в круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение:

Первый этап. *Составление математической модели*

1. Выбираем независимую переменную x и выражаем через неё стороны прямоугольника. x см – длина прямоугольника, $0 < x < 2R$;

$\sqrt{4R^2 - x^2}$ см – ширина прямоугольника.;

2. Записываем функцию $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, выражающую площадь прямоугольника.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Находим наибольшее значение функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на отрезке $[0; 2R]$.

Решаем уравнение

$$S'(x) = 0, \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0, 4R^2 - 2x^2 = 0,$$

откуда $x = R\sqrt{2}$ (значение $x = -R\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию задачи).

Вычисляем значения функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ при $x = R\sqrt{2}$ и на концах отрезка $[0; 2R]$. Т. к. $S(0) = S(2R) = 0$, а $S(R\sqrt{2}) = 2R^2$, то функция принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$. Поскольку наибольшее значение функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на отрезке $[0; 2R]$ достигается во внутренней точке отрезка, то наибольшее ее значение на интервале $(0; 2R)$.

Также достигается в точке $x = R\sqrt{2}$. При этом длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, т. е. искомым прямоугольником служит квадрат. Наибольшее значение функции $S(x) = 2R^2$.

Таким образом, количество отходов будет наименьшим, если в сечении балки будет квадрат.

Третий этап. *Ответ.* Количество отходов будет наименьшим, если в сечении балки будет квадрат со стороной $R\sqrt{2}$.

Таким образом, с помощью такого математического метода мы смогли добиться наиболее оптимизированного расхода материала для изготовления балки.

Литература

1. <http://bookzooka.com/book/260-metody-optimizacii-v-proektirovanii-konstrukcij-ucheb-posobie-atapin-vg/9-15nbsp-kriterijnbsp-yeffektivnostinbsp-celevaya-funkciya.html>.
2. <https://moluch.ru/archive/192/48257/>.

Воронин Д. Е.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ

Аннотация. Представлена история появления алгебры как самостоятельной науки.

Ключевые слова: история, алгебра, наука.

Алгебра представляет собой часть математики, изучающую общие свойства действий над величинами, а также решение уравнений, связанных с такими действиями. Это своеобразный язык, объясняющий закономерности в поведении чисел. Проблема истории появления алгебры является одной из самых распространённых тем в физико-математических науках. Это обусловлено происхождением самого слова «алгебра», данный вопрос до сих пор остаётся дискуссионным.

По мнению большинства исследователей, термин пришёл с арабского языка и дословно переводится как «восстановление». «Ал-джабр» означает название алгебраической операции – переноса вычитаемых членов из одной части равенства в другую, при помощи которой уравнение приводится к каноническому виду. Считается, что такое название этой математической дисциплине было присвоено учёным Мухаммедом ибн Мусой ал-Хорезми в «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы», в которой алгебра впервые предстаёт как самостоятельная наука об общих методах решения линейных и квадратных уравнений. Вместе с тем ряд авторов утверждает, что термин «алгебра» производно от имени математика Гебера, хотя существование последнего также подвергается сомнению.

Кроме того, отцом алгебры часто называют древнегреческого математика Диофанта, автора одной из первых алгебраических работ – трактата «Арифметика». В нём обсуждается решение ряда алгебраических уравнений до четвёртой степени, хотя и не предлагается никакой общий метод.

Несмотря на сложность заданий, с которыми сталкивались в древности учёные (прежде всего, китайские и индийские), включая в том числе квадратные и биквадратные уравнения, системы уравнений с двумя неизвестными, это были конкретные задачи. И только в IX веке Мухаммед ал-Хорезми пошёл от частного к общему. Он создал систематический метод анализа задач, чтобы решение подходило для любых чисел. Великий про-

рыв Мухаммеда ал-Хорезми произошёл, когда он применил алгебру к квадратным уравнениям, включающим числа во второй степени.

Стоит отметить, что развитие алгебры сковывало отчасти отсутствие в то время удобной и развитой символики, которое влекло за собой необходимость изложения самых сложных формул в словесной форме. Вводить буквенные обозначения для решения числовых отношений стал французский математик Ф. Виет. Однако его символика была далека от современного вида, так как он не признавал отрицательных чисел, и была затем усовершенствована многими учёными.

Употребляемые и поныне обозначения позволили далеко продвинуться в решении систем линейных уравнений, а также доказать основную теорему алгебры – любое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

В начале XIX века алгебра освободилась от несвойственной ей геометрической формы и получила самостоятельное обоснование, были выработаны правила буквенного исчисления для рациональных и иррациональных выражений, сформулирована чёткая теория комплексных чисел, а также стали возникать различные виды алгебр, среди которых алгебра обычных чисел, матриц, высказываний, множеств и т. д.

Тем не менее, дальнейшее развитие алгебры пошло по пути её становления как общей науки об операциях и их свойствах. Исследование свойств композиций различных видов позволило сделать вывод, что основная цель алгебры – изучение свойств операций, рассматриваемых независимо от объектов, к которым они применяются. Таким образом, алгебру стали понимать, как общую науку о свойствах законов композиции.

На сегодняшний день алгебра всё чаще обращается к современным технологиям. Использование специализированных компьютерных программ открывает новые возможности для совершенствования и развития этой науки.

Литература

1. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1989. – С. 13.
2. Лютер, И. О. Алгебра в классификации наук ал-Фараби / И. О. Лютер. – Тула: Тульский государственный университет, 2018. – С. 342.
3. Орлова, И. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для СПО / И. В. Орлова, В. В. Угрозов, Е. С. Филонова. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – С. 13.
4. Султанова, И. А. Методика обучения решению линейных и квадратных уравнений с параметром в основной школе / И. А. Султанова, Е. Н. Эрентраут. – Челябинск, 2018. – С. 18.

Гладышева А. А.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

***Аннотация.** Представлены положительные стороны применения мультимедийного решебника при изучении разделов по дисциплине «Математика».*

***Ключевые слова:** мультимедиа, медиаматериалы, математика.*

Человечество на протяжении многих веков увлекается играми, которые зачастую переплетаются с математикой, искусством и спортом. Существует большое разнообразие математических и логических игр как для детей, так и для взрослых. Они многие годы остаются популярными, так как способствуют развитию памяти и мышления. Но существуют математические игры, которые до сих пор остаются нерешёнными.

Примером может являться популярная игра крестики-нолики на бесконечном поле (рендзю). Она, как известно, при правильной стратегии обоих игроков бесконечна, но выигрышную стратегию при этом никто не знает.

Рассмотрим несколько математических задач.

Поиск задуманного числа. Существует множество вариантов поиска задуманного положительного числа в результате проведения определенных действий. Например, пусть человек задумает число и выполнит с ним несколько действий: умножит задуманное число на 5; прибавит к произведению 6; умножит сумму на 4; прибавит к произведению 9; умножит полученную сумму на 5. Если теперь из последнего результата вычтеть 165 и разность разделить на 100, то получится задуманное число.

Например, мы имеем задуманное число N . Тогда представленная последовательность операций приводит к следующему результату: $5N$; $5N + 6$; $20N + 24$; $20N + 33$; $100N + 165$.

Гамильтонова игра. Суть этой игры в нахождении такого маршрута по ребрам правильного додекаэдра, который проходит ровно один раз через каждую вершину додекаэдра. Изобретатель игры Уильям Гамильтон обозначал двадцать вершин додекаэдра буквами, которые символизировали названия разных городов. Все возможные пути – это тридцать

ребер додекаэдра. Для удобства додекаэдр уместно заменить плоской доской, размеченной так, как показано на рисунке (рис. 1).

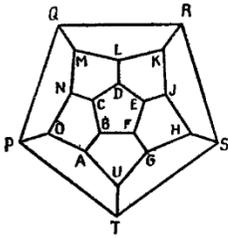


Рис. 1

Одна из задач – объехать «весь мир», а именно: начиная от какого-либо города, побывать в каждом городе один раз и вернуться в начальный пункт, причем определен порядок, в котором следует посетить первые N городов, где N не превосходит 5. Данное правило Гамильтона было изложено на собрании Британской ассоциации в Дублине в 1857 г. При данных обозначениях верным маршрутом будет ABCDEFGHJKL MNOPQRSTU. Всего имеется 30 решений задачи, однако все они эквивалентны с учетом группы симметрии додекаэдра.

Головоломки с разрезаниями. Они основаны на прямолинейных разрезах, с помощью которых необходимо получить части данной прямоугольной фигуры, из которых можно было бы сложить другую определенную фигуру.

Г. Э. Дьюдени придумал много остроумных и оригинальных задач на разрезание, в которых всегда оговорено число частей. Примерами подобных геометрических развлечений являются следующие головоломки Дьюдени: 1) двумя прямыми разрезать греческий крест (т. е. крест, составленный из пяти равных квадратов) на четыре части одинаковой формы и размера, из которых можно сложить квадрат; 2) разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на четыре части, из которых можно сложить греческий крест.

Э. Г. Уилер и М. Гольдберг разрезали правильный пятиугольник на шесть частей, составляющих равносторонний треугольник, а Дж. Треверс разрезал правильный восьмиугольник на пять частей, составляющих квадрат (рис. 2, 3).

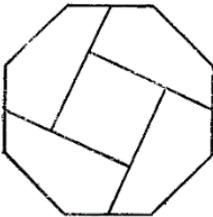


Рис. 2

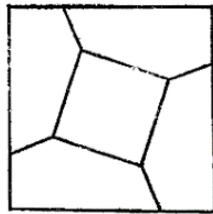


Рис. 3

Математические игры и головоломки очень популярны, как, впрочем, и все игры. Причем сложность игры не говорит о большем интересе к ней. Часто миллионы людей с интересом играют в самые простые игры. Именно они, как правило, и делают известными их создателей. Такие игры легко входят в историю математики.

Наиболее приближенными к математике являются головоломки, но много головоломок образовалось из когда-то существовавших (а некоторые из ещё существующих) игр. Основоположниками подобных игр были древнегреческие математики.

Простейшие математические игры часто используют как задачи, в которых нужно найти выигрышную стратегию, либо одно положение перевести в другое. Иногда задачи бывают несложными, когда они решаются известными методами, но есть и весьма простые, которые до сих пор остаются нерешенными.

Таким образом, здесь рассмотрена лишь малая часть замечательных головоломок, придуманных математиками разных времён, которые и в наше время остаются популярными.

Литература

1. <https://www.studmed.ru/>.
2. <http://puzzlepedia.ru/dudeney.html>.

УДК 519.85

Григорьева В. В.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

***Аннотация.** В данной статье рассматривается задача выпуклого программирования на примере нахождения максимального значения функции при заданных условиях. Представлена теоретическая основа для решения задачи, а также разобрана задача выпуклого программирования.*

***Ключевые слова:** выпуклое программирование, нелинейное программирование, функция Лагранжа, симплекс-метод.*

Немаловажную роль в экономической теории занимает выпуклость. К примеру, функция полезности и производственная функция являются вогнутыми, согласно классической теории. А выпуклой является функция спроса, которая представляет собой решение задачи максимизации функции полезности на бюджетном ограничении. Выпуклость и вогнутость важны тем, что они гарантируют нахождение оптимального решения задачи. Критериями оптимальности могут быть издержки производства, величина прибыли.

Необходимо найти максимальное значение функции:

$$f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2.$$

при заданных условиях: $x_1 + x_2 \leq 7$; $x_2 \leq 5$; $x_1, x_2 \geq 0$.

Заданная функция $f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$ является вогнутой, так как состоит из суммы отрицательно определённой квадратичной формы $f_1 = -x_1^2 - x_2^2$ и вогнутой линейной функции $f_2 = x_1 + 8x_2$. Система ограничений задачи состоит лишь из линейных неравенств. Поэтому воспользуемся теоремой Куна-Таккера.

Составим функцию Лагранжа для заданной функции:

$$L = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 + y_1(7 - x_1 - x_2) + y_2(5 - x_2).$$

Запишем необходимые и достаточные условия существования седловой точки функции в виде неравенств и уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 1 - y_1 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 8 - y_1 - y_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = 7 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = 5 - x_2 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(-2x_1 + 1 - y_1) \leq 0, \\ x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(-2x_2 + 8 - y_1 - y_2) \leq 0, \\ y_1 \frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(7 - x_1 - x_2) \geq 0, \\ y_2 \frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(5 - x_2) \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 \geq 1, \\ 2x_2 + y_1 + y_2 \geq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 5, \end{cases} \begin{cases} 2x_1 + y_1 - v_1 = 1, \\ 2x_2 + y_1 + y_2 - v_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7, \\ x_2 + w_2 = 5, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0.$$

В систему (1) ввели дополнительные неотрицательные переменные v_1 , v_2 и w_1 , w_2 , которые обращают неравенства в равенства. Чтобы

найти базисное решение системы линейных уравнений, используем метод искусственного базиса. Рассмотрим задачу линейного программирования, которая состоит в определении максимального значения функции: $\bar{F} = -Mz_1 - Mz_2$.

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - v_1 + z_1 = 1, \\ 2x_2 + y_1 + y_2 - v_2 + z_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7, \\ x_2 + w_2 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 - 2x_1 - y_1 + v_1, \\ z_2 = 8 - 2x_2 - y_1 - y_2 + v_2, \\ w_1 = 7 - x_1 - x_2, \\ w_2 = 5 - x_2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0.$$

$$z_1 + z_2 = 9 - 2x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + v_1 + v_2.$$

$$F = f - M(z_1 + z_2) = f - M(9 - 2x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + v_1 + v_2).$$

По полученным системам составим симплекс-таблицу:

БП	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$
z_1	1	2	0	1	0	-1	0
z_2	8	0	2	1	1	0	-1
w_1	7	1	1	0	0	0	0
w_2	5	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
M	-9	-2	-2	-2	-1	1	1

Для перехода к следующей таблице находим разрешающий столбец $-x_1$ и разрешающую строку z_1 . Разрешающим элементом является число 2. В результате вычислений получена следующая таблица:

БП	1	z_1	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$
x_1	$\frac{1}{2}$	/	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
z_2	8	/	2	1	1	0	-1
w_1	$\frac{13}{2}$	/	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
w_2	5	/	1	0	0	0	0
f	0	/	0	0	0	0	0
M	-8	/	-2	-1	-1	0	1

По такому же принципу получена третья таблица:

БП	1	z_1	z_2	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$
x_1	$\frac{1}{2}$	/	/	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	4	/	/	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
w_1	$\frac{5}{2}$	/	/	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w_2	1	/	/	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
f	0	/	/	0	0	0	0
M	0	/	/	0	0	0	0

Выполняются условия: $v_1 x_1^0 = 0$, $v_2 x_2^0 = 0$, $w_1 y_1^0 = 0$, $w_2 y_2^0 = 0$. Используя метод искусственного базиса, определены координаты седловой точки функции Лагранжа $(X_0, Y_0) = (0,5; 4; 0; 0)$. Точка $X^* = (0,5; 4)$ является оптимальным планом задачи и максимальное значение функции равно $f_{\max} = 16,25$.

Литература

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 352 с.

УДК 519.85

Григорьева В. В.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ОГРАНИЧЕНИЙ

***Аннотация.** В данной статье рассматривается задача нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.*

Ключевые слова: нелинейное программирование, выпуклые функции, вогнутые функции.

Разнообразные задачи позволяют увидеть ряд особенностей нелинейных задач, которые делают их более трудными для решения, чем линейные задачи. Для задач нелинейного программирования большинство вычислительных методов позволяет найти только точку локального оптимума, которые часто оказываются полезными на практике.

В практических приложениях встречается большое число задач, в которых либо целевая функция, либо система ограничений (либо та и другая) содержат выражения нелинейные относительно переменных. Такие задачи являются более общими и называются задачами нелинейного программирования.

Рассмотрим экономическую задачу нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.

Для транспортировки некоторого химиката требуется изготовить контейнеры. Требования к контейнерам: 1) емкость контейнера 6 м^3 ; 2) высота может составлять от 1 до 3 м; 3) основание контейнера должно быть квадратным. Дно и стенки контейнера, которые непосредственно соприкасаются с химикатом, должны быть изготовлены из более стойкого материала, чем крышка контейнера. Стоимость материала дна и стенок контейнера 6 ден. ед./ м^2 , стоимость материала крышки 4 ден. ед./ м^2 . Требуется найти габаритные размеры контейнера (размеры основания и высоту), при которых его стоимость будет минимальной.

Обозначим высоту контейнера как y , а размеры его основания (длину и ширину) – как x . Тогда для данной задачи можно построить математическую модель:

$$\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 3, \\ x^2 y = 6, \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

$$F = 6x^2 + 24xy + 4x^2 \rightarrow \min ; F = 10x^2 + 24xy \rightarrow \min .$$

Здесь первое и второе ограничения устанавливают, что высота контейнера должна составлять от 1 до 3 м; третье ограничение устанавливает, что емкость контейнера равна 6 м^3 . Целевая функция F выражает стоимость контейнера (первое слагаемое – стоимость материала для основания, второе – стоимость материала для стенок, третье – для крышки). Данная задача представляет собой задачу нелинейного про-

граммирования: нелинейными здесь является целевая функция и ограничение на емкость контейнера.

Решение. Используем метод множителей Лагранжа. Для этого составляется функция Лагранжа: $L = 10x^2 + 24y - \lambda(x^2y - 6)$.

Необходимые условия экстремума функции L дают систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 20x + 24y - 2\lambda yx = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 24x - \lambda x^2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2y - 6) = 0. \end{cases}$$

Выразим из третьего уравнения системы: $y = \frac{6}{x^2}$ и подставим в первое уравнение: $20x + \frac{144}{x^2} - \frac{12\lambda}{x} = 0$; $\frac{20}{12}x^3 + 12 - \lambda x = 0$.

Переносим λ в правые части первых двух уравнений получим:
 1) $\lambda x = \frac{20}{12}x^3 + 12$; $\lambda = \frac{5}{3}x^2 + \frac{12}{x}$; 2) $\lambda x^2 = 24x$; $\lambda = \frac{24}{x}$.

Приравняем левые части и получим: $\frac{5}{3}x^2 + \frac{12}{x} = \frac{24}{x}$; $\frac{5}{3}x^2 - \frac{12}{x} = 0$;
 $5x^3 = 36$; $x^3 = 7,2$; $x = \sqrt[3]{7,2} \approx 1,93$. Из третьего уравнения системы определим, что $y = \frac{6}{x^2} = \frac{5\sqrt[3]{7,2}}{6} \approx 1,61$.

Таким образом, нашли стационарную точку $X^* = (\sqrt[3]{7,2}; \frac{5\sqrt[3]{7,2}}{6})$, в которой достигается минимум функции F :

$$F_{\min} = 10 \cdot (\sqrt[3]{7,2})^2 + 24 \cdot \sqrt[3]{7,2} \cdot \frac{5\sqrt[3]{7,2}}{6} = 30(\sqrt[3]{7,2})^2 \approx 111,86.$$

Ответ: габаритные размеры контейнера следующие: длина и ширина равны 1,93 м; высота равна 1,61 м; а минимальная стоимость контейнера равна 111,86 ден. ед.

Литература

1. Аттетков, А. В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 440 с.
2. Смородинский, С. С. Оптимизация решений на основе методов и моделей мат. программирования: учеб. пособие по курсу «Систем. анализ и исслед. операций» для студ. спец. «Автоматизир. системы обраб. информ.» дневн. и дистанц. форм обуч. / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Мн.: БГУИР, 2003. – 136 с.: ил.
3. Калихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М.: Высш. школа, 1975. – 270 с.: ил.
4. Карманов, В. Г. Математическое программирование: учеб. пособие / В. Г. Карманов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

УДК 501

Дмитриева К. В.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ СТРОИТЕЛЯ

Аннотация. Представлены основные способы применения математических формул и теорем в различных строительных работах.

Ключевые слова: *строитель, формулы, расчет.*

Математика – одна из важнейших наук в современном мире. Область применения математических законов не знает границ, они используются во многих отраслях науки и в различных сферах производства. Как же связана математика с профессией строителя?

Строитель – одна из древнейших профессий. Появилась она много лет назад, когда, выйдя из пещер, люди стали возводить себе жильё. Построенные в древности знаменитые замки, храмы, дворцы и другие величайшие сооружения по всему свету и сейчас вызывают восторг у людей своим архитектурным великолепием. Уже тогда во время строительства людям часто приходилось прибегать к помощи математики.

Рассмотрим применение математических формул и теорем в сфере строительного дела.

В строительстве часто возникает потребность в определении прямого угла. Её можно решить двумя способами. Первый состоит в использовании специального инструмента – угольника. Однако габариты этого инструмента не позволяют использовать его повсеместно. Второй же метод можно применять для определения перпендикулярности поверхностей любой протяженности. Он заключается в использовании следующего правила – соотношение катетов и гипотенузы в прямоугольном треугольнике соответствует числовому ряду 3-4-5. Следовательно, чтобы проверить перпендикулярность поверхностей, необходимо отметить на сопрягаемых участках расстояние в 3 и 4 метра и соединить их 5-метровой гипотенузой. Этот метод был известен еще строителям Древнего Египта. Но современные инженеры-строители рассматривают этот способ, как частный случай общеизвестной теоремы Пифагора.

Также можно представить, что строителю необходимо положить паркет. Это требует заливки пола раствором на высоту 5 см. Для этого ему нужно узнать объем заливаемого раствора, то есть решить простую математическую задачу, используя формулы площади и объёма. Длина пола – 8 м., ширина – 4 м. При помощи формулы $S = a \cdot b$ он узнает, что площадь пола равна 32 кв. м. Известно, что пол ему надо поднять ровно на 5 см. За высоту он принимает то расстояние, на которое ему надо поднять пол, то есть на 5 см. Объем пола составляет 1,6 кубометра (по формуле вычисления объема $V = S \cdot h$).

В начале строительства любого кирпичного здания необходимо закупить требуемое количество кирпича. Для этого нужно выполнить предварительный расчет. Правильно проведенные расчеты позволяют избежать лишних расходов на закупку стройматериалов и проблем с их нехваткой в ходе строительства.

Рассмотрим конкретный пример:

Требуется построить одноэтажный кирпичный дом 8 на 10 метров, высотой стен 3 метра и без внутренних кирпичных стен. В наружных стенах имеется один проем для входной двери 1 на 2 метра и три проема для окон 1,2 на 1,5 метра. Толщина стен в два кирпича из стандартного одинарного кирпича с толщиной швов 5 мм.

1. Определяем периметр наружных стен: $(8+10) \cdot 2 = 36$ м.
2. Находим общую площадь стен дома: $36 \cdot 3 = 108$ кв. м.
3. Вычисляем общую площадь дверных и оконных проемов:
 $(1 \cdot 2) + (1,2 \cdot 1,5) \cdot 3 = 7,4$ кв. м.
4. Рассчитываем площадь кирпичной кладки стен:
 $108 - 7,4 = 100,6$ кв. м.

5. Определяем количество кирпича в одном квадратном метре, для чего вычисляем площадь торца одного кирпича: $0,12 \cdot 0,065 = 0,0078$ и делим это значение на единицу: $1 \div 0,0078 = 128$, после чего умножаем на два (т. к. кладка будет в 2 кирпича). Получаем $128 \cdot 2 = 256$ кирпичей на 1 кв. м.

6. Рассчитываем нужное количество кирпичей для строительства дома, умножая общую площадь стен без учета проемов на количество кирпичей в 1 кв. м.:

$$100,6 \cdot 56 = 25753,6.$$

Таким образом, для постройки стен дома будет необходимо 25 754 кирпича.

Современное строительство – это многогранная система, где задействовано большое количество людей, выполняющих определённую задачу. Для того чтобы построить объект, необходимо не только организовать согласованную работу всех людей на разных участках, но и сократить вероятность ошибок, которые могут привести к необратимым последствиям.

Чтобы снизить вероятность таких ошибок, следует основывать решения на рекомендациях фундаментальных наук, таких как математика, и использовать возможности вычислительных программ для полного анализа объекта.

Литература

1. Саматов, Н. М. Строительная математика / Н. М. Саматов. – М.: Высшая школа, 1975.
2. <http://chas-remonta.com/kalkulyator/raschet-kirpicha-na-dom.html>.

УДК 511.17

Закрасняная В. И., Мустафина С. С.

Поволжский государственный технологический университет

МОДУЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

***Аннотация.** Работа посвящена модулярной арифметике, истории её создания и практическому применению в различных областях.*

***Ключевые слова:** модулярная арифметика, сравнение по модулю, система остаточных классов.*

Рассматриваются основные понятия и некоторые теоремы модульной арифметики, а также области её применения.

Модульная арифметика – это арифметика остатков. Она основана на понятии сравнения по модулю. Говорят, что два целых числа a и b сравнимы по модулю m , где m – натуральное число: $a \equiv b \pmod{m}$, если при делении на m они дают одинаковые остатки (или их разность $a - b$ делится на m). Например, 27 сравнимо с 12 по модулю 5: $27 \equiv 12 \pmod{5}$, так как оба этих числа дают при делении на 5 одинаковые остатки, равные 2.

Предпосылкой к созданию теории сравнений стало восстановление в 1621 году сочинений Диофанта, изучение которых привело Ферма к открытиям, которые существенно опередили своё время. В 1640 году он сообщил без доказательства теорему, впоследствии получившую название *малой теоремы Ферма*: если p – простое число и a – целое число, не делящееся на p , то a в степени $p-1$ сравнимо с единицей по модулю p :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Первое доказательство этой теоремы принадлежит Лейбницу, причём он открыл указанную теорему независимо от Ферма не позднее 1683 года. Позже изучение вопросов, посвященных теории чисел и теории сравнений, было продолжено Эйлером, который обобщил теорему Ферма, установив, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p}$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера (число натуральных чисел, взаимно простых с n и меньших n).

Гаусс преобразовал все накопленные до него сведения, связанные с операциями сравнения по модулю, в стройную теорию, которая впервые была изложена в его книге «Арифметические исследования» (1801), ввёл понятие и символьное обозначение сравнений.

Одной из самых знаменитых теорем модульной арифметики является *китайская теорема об остатках*, которая была описана в трактате китайского математика Сунь Цзы «Сунь Цзы Суань Цзин», предположительно датированном 3 веком н. э. Эта теорема утверждает, что если m_1, \dots, m_n – некоторые натуральные взаимно простые числа, то любое целое неотрицательное число x , меньшее $M \equiv m_1 \cdot \dots \cdot m_n$, может быть однозначно представлено в виде последовательности остатков (a_1, \dots, a_n) от деления x на m_1, \dots, m_n , то есть $a_i \equiv x \pmod{m_i}$, $0 \leq a_i < m_i$. Последовательность (a_1, \dots, a_n) называют представлением числа x в системе остаточных классов (СОК), и каждое из чисел a_i называется разрядом числа в СОК. Например, если

$m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 11$, то в этой системе можно однозначно представить с помощью остатков $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ различных чисел (от 0 до 384). Умножение и сложение чисел сводится к умножению их остатков:

$$13 + 15 \rightarrow (3, 6, 2) + (0, 1, 4) = (3, 0, 6) \rightarrow 28.$$

$$13 \cdot 15 \rightarrow (3, 6, 2) \cdot (0, 1, 4) = (0, 6, 8) \rightarrow 195.$$

Китайская теорема об остатках лежит в основе реализации функций алгебры логики числовыми методами, быстрого преобразования Фурье на основе простых чисел, принципа Хассе поиска целочисленных корней уравнения, также из неё следует мультипликативность функции Эйлера. Теорема имеет множество применений в шифровании и дешифровании в криптографических системах, например, в криптосистеме Рабина или в шифре Виженера.

Модульная арифметика используется в теории чисел, теории групп, теории колец, теории узлов, общей алгебре, криптографии, информатике, химии и других областях. Например, сравнения часто применяются для вычисления контрольных сумм, используемых в идентификаторах. Так, для определения ошибок при вводе международного номера банковского счёта используется сравнение по модулю 97. В химии последняя цифра в регистрационном номере CAS является значением контрольной суммы, которая вычисляется путём сложения последней цифры номера, умноженной на 1, второй справа цифры, умноженной на 2, третьей, умноженной на три и так далее до первой слева цифры, завершаясь вычислением остатка от деления на 10.

В информатике модульная арифметика применяется в побитовых и других операциях, включающих циклические структуры данных фиксированной ширины. Еще в 1950-е годы для работы с очень большими числами было предложено использовать систему остаточных классов (СОК) – одну из непозиционных систем счисления. Это позволяет чрезвычайно эффективно выполнять некоторые распространенные классы задач, сводящихся к сложению, умножению и возведению в степень многоразрядных чисел. Так как система непозиционная, это можно делать совершенно независимо друг от друга для каждого разряда, операции переноса в следующий разряд здесь не требуются. На этой основе нашими учёными Акушским И. Я, Лукиным Ф. В. и Юдитским Д. И. и другими было разработано несколько поколений специальных модулярных ЭВМ, которые используются и по сей день для обслуживания систем ПРО и ПВО.

Модульная арифметика также широко используется в криптографии. В ней типичными значениями модулей являются 2, 10 и 26. Для шифро-

вания данных часто используется алгоритм RSA – криптографический алгоритм с открытым ключом, в основе которого также лежит модульная арифметика. Криптосистема RSA стала первой системой, пригодной и для шифрования, и для цифровой подписи.

Литература

1. Модульная арифметика <https://studfiles.net/preview/4599433/page:29/>.
2. Модульная арифметика <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1043119>.
3. Сравнение по модулю <https://ru.wikipedia.org/wiki/>.
4. Модульная арифметика: что это такое и где применяется <http://fb.ru/article/459044/>.

УДК 519.653

Замятин И. С., Кулагина С. В.

Поволжский государственный технологический университет

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА, И ИХ СВОЙСТВА

***Аннотация.** Работа посвящена многочленам Чебышева, которые применяются в решении геодезических и картографических задач, в решении алгебраических уравнений и оптимизации свойств вычислительных алгоритмов.*

***Ключевые слова:** многочлены Чебышева первого и второго рода, свойства многочленов Чебышева.*

Современная математика изучает и использует в общем случае многочлены от одной переменной, у которых коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n являются объектами произвольной природы, а не только числами. В истории известны многие имена ученых, которые занимались изучением многочленов. Якоб Бернулли, Этьен Безу, Ульям Горнер, Жозеф Лагранж и многие другие известные математики, которые открыли немало нового и удивительного о многочленах. Среди этих ученых был великий русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук Пафнутий Львович Чебышёв. В его научном наследии насчитывается более 80 работ.

Среди этих работ важное место занимают многочлены Чебышёва и их разновидности, они играют важную роль в теории приближений, поскольку корни многочленов Чебышева первого рода используются в качестве узлов в интерполяции алгебраическими многочленами.

Многочлены Чебышева – две последовательности ортогональных многочленов $T_n(x)$ и $U_n(x)$, где $n \geq 0$, которые меньше всего отклоняются от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Многочлен Чебышева первого рода – $T_n(x)$ характеризуется как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1} . Впервые были рассмотрены самим Чебышевым.

Многочлены Чебышева второго рода – $U_n(x)$ характеризуются как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^n . Впервые были рассмотрены в совместной работе двумя учениками Чебышева – Коркиным и Золоторевым.

Существует несколько способов определения многочленов Чебышева.

1. Рекурсивное определение.

Многочлены Чебышева первого $T_n(x)$ и второго $U_n(x)$ рода могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) &= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x); \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) &= 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x). \end{aligned}$$

2. Явные формулы.

Многочлены Чебышева являются решениями уравнения Пелля:

$$T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x) = 1$$

в кольце многочленов с вещественными коэффициентами и удовлетворяют тождеству:

$$T_n(x) + U_{n-1}(x)\sqrt{x^2 - 1} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Из последнего тождества также следуют явные формулы:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k}.$$

Явная формула для многочлена Чебышева второго рода:

$$U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (x^2 - 1)^k x^{n-2k}.$$

3. Тригонометрическое определение.

Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$ могут быть также определены с помощью тригонометрического равенства:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \text{ или, что почти эквивалентно,}$$

$$T_n(z) = \cos(n \arccos(z)).$$

Многочлены Чебышёва второго рода $U_n(x)$ определяются с помощью следующего равенства: $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$.

Свойства многочленов Чебышева.

Многочлены Чебышева обладают следующими свойствами:

1. Многочлены Чебышева являются четными (нечетными) функциями. Для четных n многочлен Чебышева имеет четные степени x , а для нечетных n соответственно нечетные степени x .

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1,$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

2. Сумма коэффициентов многочленов Чебышёва первого рода $T_n(x)$ равняется 1, а коэффициентов многочленов второго рода $U_n(x)$ равняется $n+1$.

3. Коэффициент при старшей степени x^n равен 2^{n-1} .

4. Многочлен $T_n(x)$ имеет на интервале $(-1,1)$ ровно n различных действительных корней, определяемых формулой:

$$x_i = \cos(2i+1) \cdot \frac{\pi}{2n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

5. Среди всех многочленов, значения которых на отрезке $[-1,1]$ не превосходят по модулю 1, многочлен Чебышева имеет:

- наибольший старший коэффициент;
- наибольшее значение в любой точке за пределами $[-1,1]$;
- если $n \equiv k \pmod{2}$, то $|a_{k-1}| + |a_k| \leq |t_k|$, где t_k – коэффициент многочлена Чебышева первого рода, a_k – коэффициент любого из рассматриваемых полиномов.

6. Нули полиномов Чебышёва являются оптимальными узлами в различных интерполяционных схемах. Например, в методе дискретных особенностей, который часто используется при исследовании интегральных уравнений в электродинамике и аэродинамике.

Литература

1. Чебышев, П. Л. Избранные труды / П. Л. Чебышев. – Т. 2. – М.: издательство Академии Наук СССР, 1955. – 929 с.

2. Чебышев, П. Л. Научное наследие П. Л. Чебышева. – Математика. – 1945. – Выпуск 1.
3. Табачников, С. Л. Многочлены / С. Л. Табачников. – 2 изд. перераб. – М.: Фазис, 2000. – 200 с.
4. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1989. – 432 с.

УДК 519.62

Зверев М. В., Кулагина С. В.

Поволжский государственный технологический университет

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Аннотация.** Работа посвящена изучению итерационных методов решения нелинейных уравнений.*

***Ключевые слова:** метод простых итераций, методы Ньютона.*

Метод простых итераций в общем виде

Заменим исходное уравнение $f(x) = 0$ на эквивалентное $g(x) = x$, и будем строить итерации по правилу $x_{n+1} = g(x_n)$. Таким образом метод простой итерации – это одношаговый итерационный процесс. Для того чтобы начать данный процесс, необходимо знать начальное приближение x_0 . Выясним условия сходимости метода и выбор начального приближения.

Сходимость метода простых итераций

Метод сходится, если при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

Обозначим $U_r(a)$ окрестность точки a радиуса r , то есть

$$U_r(a) = \{x : |x - a| < r\}.$$

Теорема 1. Если $g(x)$ липшиц-непрерывна с константой $q \in (0, 1)$ на $U_r(a)$, то есть выполняется

$$|g(x'') - g(x')| < q|x'' - x'|,$$

при этом если также выполнено

$$|g(a) - a| < (1 - q)r,$$

то уравнение $x = g(x)$ имеет единственное решение на $U_r(a)$ и метод простой итерации сходится к решению при любом выборе начального приближения $x_0 \in U_r(a)$.

Также справедлива оценка:

$$|x_k - x_*| < q^k |x_0 - x_*|,$$

где x_* – точное решение.

Из оценки видно, что метод линеен.

Метод Ньютона-Рафсона

Метод простой итерации медленно сходится к решению x_* . Скорость сходимости можно существенно увеличить, если «движение» к новому приближению корня делать не параллельно оси OX до пересечения с прямой $y = x$, а по касательной к графику кривой $y = f(x)$.

Пусть итерационный процесс достиг точки x_{n-1} . Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_{n-1} :

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Найдем точку пересечения касательной с прямой $y = x$:

$$x = \frac{f(x_{n-1}) - x_{n-1}f'(x_{n-1})}{1 - f'(x_{n-1})}.$$

Модифицированный метод Ньютона

Модифицированный метод Ньютона лишь немного отличается от метода касательных и обладает меньшей скоростью сходимости. Здесь значение производной вычисляется всего один раз в точке первого приближения и больше не изменяется. Следовательно, её вычисление будет

стоять до оператора цикла. Общая формула вычисления последующего приближения будет выглядеть так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Модификация метода Ньютона заключается в замене производной $f'(x_n)$ в точке x_n в формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{df/dx(x_n)}$$

на производную $f'(x_0)$ в точке x_0 , т.е. полагаем $f'(x_n) = f'(x_0)$. В результате получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{df/dx(x_0)}.$$

Вывод

Недостатком итерационной процедуры стандартного метода Ньютона-Рафсона является то, что на всех итерациях при решении системы уравнений надо формировать матрицу и проводить ее факторизацию.

В модифицированном методе Ньютона-Рафсона касательная матрица не пересчитывается на каждой итерации. Вместо этого на каждой итерации используется одна и та же матрица. Недостатками итерационной процедуры модифицированного метода Ньютона-Рафсона являются ее более медленная сходимость и более частая расходимость по сравнению с процедурой стандартного метода Ньютона-Рафсона.

Литература

1. <https://www.ngpedia.ru/id149360p1.html>.
2. <http://statistica.ru/branches-maths/chislennye-metody-resheniya-uravneniy/#s3a>.
3. <http://moodle32.lms.tpu.ru/mod/book/view.php?id=1713&chapterid=829>.
4. <http://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/vychislitelnaia-matematika/3-2-1-metod-prostykh-iteracii-metod-posledovatelnykh-priblizhenii>.
5. <http://padaread.com/?book=36621&pg=188>.
6. http://e-lib.gasu.ru/eposobia/metody/R_2_2.html.
7. <https://www.ngpedia.ru/id149360p1.html>.
8. <https://studfiles.net/preview/3652200/page/7/>.

Иванова Е. В.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ГРАФЫ В АРХИТЕКТУРЕ

Аннотация. *Представлено применение теории графов в области архитектуры и строительства, также приведены примеры для наглядного рассмотрения и изучения.*

Ключевые слова: *графы, строительство, архитектура.*

Теория графов в современном мире является усиленно формирующимся разделом математики. Это можно объяснить тем, что в виде структур, состоящих из графов, характеризуются многие предметы и ситуации, что очень немаловажно для стандартного функционирования жизни всего общества.

Теория графов представляет собой основную значимость во многих этапах архитектурного проектирования. После того как установлены части плана и перед тем как переключиться от эскизов к самим чертежам, необходимо построить граф связей между установленными элементами проекта. Безусловно, такие связи могут быть различными. Они имеют все шансы продемонстрировать физический доступ (двери), визуальный доступ (окна, стекла), общие стены. Исходя из этого, для одного и того же большого числа компонентов можно построить разнообразные графы, которые будут отображать различные связи. Рассмотрим несколько примеров.

На одном этаже жилого дома (рис. 1) на некоторую семью (дом имеет форму прямоугольника) необходимо разместить последующие компоненты: кухня (К), столовая (С), зал (З), коридор (Ко) и гараж (Г). Между этими компонентами необходимо иметь доступ из гаража в кухню, из кухни в столовую, из столовой в зал, из зала в коридор и из коридора в гараж. Если отметить точками компоненты К, С, З, Ко и Г и объединить некоторые точки ребрами, которые означают «доступ к», получится

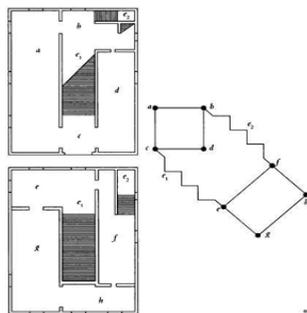


Рис. 1

граф, где хорошо заметен цикл: при данном размещении компонентов мы можем осуществить доступ из любой комнаты в другую. На базе данного графа можно сделать разнообразные эскизы:

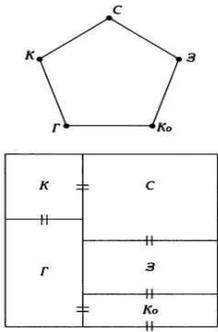


Рис. 2

Точками также можно обозначить наружное пространство или лестницу (рис. 2). Если речь идет о многоэтажных домах, то каждому этажу можно поставить в соответствие граф смежности и соединить точки, доступные с разных этажей, не прямыми, а ломаными линиями, которые будут обозначать лестницы. Исследование графов в зданиях общественного пользования поможет установить уровень доступности разных отделов, расположение помещений – буфета, библиотеки, кинозала, а также пожарных лестниц.

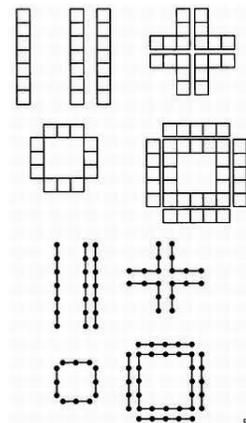


Рис. 3

Также особую заинтересованность в архитектуре предполагают графы, которые позволяют оценить наилучшее расстояние между общающимися элементами. Особый вклад внес Т. Тейбор в это направление, характеризуя в общем виде наилучшее распределение архитектурных элементов, которое позволяет уменьшить путь преодоления. Пример: на одном этаже здания офиса необходимо расположить помещения банка, администрации города, министерства и другие структуры, с помощью исследования стандартных путей можно найти наилучшее размещение помещений, которое поможет облегчить связь между организациями. Например, офисы одинаковой площади можно расположить на этаже в соответствии с одной из следующих пяти схем и эквивалентных им графов смежности. Исследовав расстояния между офисами (имеем в виду реальное расстояние, которое нужно пройти), можно установить, при каком из пяти размещений общий путь, который проходят сотрудники организаций, наименьший. В опытах Тейбора использовалась скорость 1,5 м/с при перемещении по этажу и 0,3 м/с при перемещении по лестницам. Такое правило применяется в урбанистике при проектировании больших торговых центров и пешеходных зон, регулировке плотности транспортных потоков и для решения других задач (рис. 3).

В данной работе была представлена теория графов, их применение в области архитектуры. Графы – это замечательные математические объекты, с помощью которых можно решать математические, логические и экономические задачи. Представление данных в виде графа придает им наглядность и простоту.

Литература

1. <https://sites.google.com/a/labore.ru/teoria-grafov/novosti-obrazovania/teoria-grafov-i-arhitektura>.
2. https://studopedia.ru/5_152774_istoriya-vozniknoveniya-teorii-grafov.html.
3. <https://school-science.ru/4/7/33615>.
4. <https://medium.com/eggheado-science/778c92d20cea>.

УДК 608.2

Кочергина А. А.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МУЛЬТИМЕДИЙНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

***Аннотация.** Представлены положительные стороны применения мультимедийного решебника при обучении в университете.*

***Ключевые слова:** мультимедиа, медиаматериалы, студент.*

Мультимедийные технологии все плотнее заполняют нашу жизнь. Они применяются в различных сферах деятельности, в том числе, в образовании. С помощью мультимедийных технологий можно персонально дистанционно получить знания. Появились новые методы обучения, которые изменили модель преподавания. Какие, спросите вы?

Теперь студент не будет отвлекаться от материала, как в случае стандартной лекции. Сейчас именно он решает задачи, используя медиаматериалы, а преподаватель только поддерживает его в случае необходимости, то есть отвечает на вопросы, которые возникли в ходе просмотра видео-урока.

Мультимедиа-технологии открывают новые возможности в образовательном процессе, позволяя смоделировать трудоемкие, дорогие или

опасные реальные эксперименты, проведение которых затруднительно или невозможно.

Причины внедрения новых мультимедийных технологий.

Современное общество имеет открытый доступ ко всем источникам информации, что приводит к ежедневному увеличению их объемов. Вследствие чего, общество получило название информационного.

Так, в сфере образования происходит сочетание новых разработок с проверенными технологиями. Это дает повышенный коэффициент отдачи, а именно, развивается мышление и мировоззрение, которые необходимы для существования в современных условиях. Изменения методов обучения в связи с требованиями современности требует расширения применения мультимедийных технологий.

Компьютерные технологии XXI века предоставляют огромные возможности для развития процесса обучения. Такой подход позволяет создать совершенно новую высшую школу, значительно увеличить эффективность занятий и индивидуализировать процесс получения знаний.

Мультимедийные технологии способствуют развитию навыков поиска и систематизации информации, необходимой для эффективного представления публике.

Одним из факторов восприятия информации является наглядность. Сейчас это уже не просто картинки и схемы. На данном этапе развития широко распространяются мультимедийные технологии, в которых используются анимация, звук, видео, текст. Это способствует комплексному восприятию и лучшему запоминанию материала. Благодаря видеопроигрыванию излагаемой информации в головном мозге человека происходит демонстрация динамических процессов, которые обеспечивают эффективность восприятия материала. Вся информация подкрепляется зрительными образами и воспринимается на уровне ощущений, таким образом, информация усваивается на интуитивном уровне.

Люди разделяются на несколько типов по методу восприятия информации: визуальное восприятие, с помощью слуха, практическое применение информации. Необходимо отметить, что склонности и скорость обработки поступающей информации у всех людей разные.

Преимущества использования мультимедийных технологий в образовании:

- расширение возможности предъявления учебной информации;
- воссоздание реальной обстановки действительности за счет применения цвета, графики, звука;
- повышение мотивации к обучению;

- широкое раскрытие творческих способностей обучающихся, активизация познавательной деятельности;
- качественное изменение контроля деятельности обучающихся.

Особенно ценным и важным является использование компьютеризации для обучения иностранных студентов, а именно, значительно повышается эффективность понимания предмета за счет создания необходимой среды, восприятия на слух и зрительно.

Таким образом, медиаматериалы играют большую роль при обучении в вузе. Использование мультимедиа технологий в образовательном процессе позволяет грамотно сочетать разнообразные средства обучения (текст, видео, графику и т. д.), экономить время, насытить материал информативностью. Мультимедийные технологии помогают повысить успеваемость студентов.

Следует отметить, что применение мультимедиа технологий способствует расширению визуализации учебного материала, делая его более понятным и доступным.

Литература

1. Мультимедиа-технологии в образовании: путь к свободе: материалы Первой международной интернет-конференции. Открытый каталог «Учебные презентации». – Екатеринбург, 2011. – 68 с.

УДК 512.577

Лаптандер А. М., Ершов А. С., Кулагина С. В.
Поволжский государственный технологический университет

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация. Работа посвящена описанию свойств гиперкомплексных чисел и кватернионов.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, кватернионы.

История гиперкомплексного числа

В 1843 году ирландский математик Уильям Гамильтон предложил упомянутую выше систему кватернионов, которая стала исторически первой собственно гиперкомплексной системой. Поиски такой системы были обусловлены тем, что умножение комплексных чисел описывает

повороты на плоскости, и возникло желание найти нечто аналогичное для поворотов в трехмерном пространстве. Это в какой-то мере удалось достичь с помощью кватернионов.

Теория кватернионов вскоре стала одним из источников развития таких понятий, как векторные и скалярные произведения векторов.

Понятие гиперкомплексных чисел

Гиперкомплексные числа – это конечномерные алгебры над полем вещественных чисел (то есть числа, над которыми есть пара операций, такие как «сложения» и «умножения»), также есть «умножение на вещественное число».

В элементарной алгебре наряду с действительными числами рассматривается и более широкая система комплексных чисел.

Применение гиперкомплексных чисел

Итак, назовем гиперкомплексным числом ранга n число, изображающееся совокупностью n действительных чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) и (b_1, b_2, \dots, b_n) и будем называть равными, если равны их соответствующие координаты, то есть $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Действие сложения определим естественной формулой:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Также естественно вводится операция умножения гиперкомплексного числа на действительное: $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$.

Сверх того, должно быть определено действие умножения двух гиперкомплексных чисел друг на друга, причем результат этого действия должен являться гиперкомплексным числом.

Свойства действий

1. для любых двух чисел однозначно определена их сумма;
2. для любых двух чисел однозначно определено их произведение;
3. существует число нуль со свойством, $a + 0 = a$ для любого числа a , удовлетворяющее равенству $a + x = 0$;
4. для каждого числа a существует противоположное число x , удовлетворяющее равенству $a + x = 0$;
5. сложение переместительно (коммутативно): $a + b = b + a$;
6. сложение обладает сочетательным свойством:
 $(a + b) + c = a + (b + c)$;
7. умножение переместительно: $ab = ba$;
8. умножение обладает сочетательным свойством:

$$(ab) \times c = a \times (bc);$$

9. умножение распределительно (дистрибутивно):

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca;$$

10. для каждого a и каждого $b \neq 0$ существует единственное число x , удовлетворяющее равенству $bx = a$.

Кватернионы

Кватернионы – система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Предложены Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

Кватернионы удобны для описания изометрий трех- или четырехмерного евклидовых пространств, и поэтому получили широкое распространение в механике. Также их используют в вычислительной математике, например, при создании трехмерной графики.

Сумма кватернионов

Кватернионы можно определить, как сумму: $q = a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d – вещественные числа,

i, j, k – мнимые единицы со следующим свойством:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Результат попарного произведения зависит от порядка следования (не является коммутативным): $ij = k$, а $ji = -k$.

Таблица умножения базисных кватернионов $-1, i, j, k$:

\times	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Применение через вектор и скаляр

Кватернион представляет собой пару (a, \vec{u}) , где \vec{u} – вектор трёхмерного пространства, a – скаляр (вещественное число).

Операции сложения определены следующим образом:

$$(a, \vec{u}) + (b, \vec{v}) = (a + b, \vec{u} + \vec{v}).$$

Произведение определяется следующим образом:

$$(a, \vec{u}) \cdot (b, \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v});$$

$$(a, 0) \cdot (0, \vec{v}) = (0, \vec{v}) \cdot (a, 0) = (0, a\vec{v});$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0);$$

$$(0, \vec{u}) \cdot (0, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \cdot (\vec{u}, \vec{v}).$$

Применение через комплексные числа

Произвольный кватернион $q = a + bi + cj + dk$ можно представить, как пару комплексных чисел в виде: $q = (a + bi) + (c + di)j$.

Или эквивалентно $q = z_1 + z_2j$, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, где z_1, z_2 – комплексные числа, поскольку $i^2 = -1$ выполняется как для комплексных чисел, так и для кватернионов, а $K = ij$.

Литература

1. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785913591807.html>.
2. <https://studfiles.net/preview/3640323/page:4/>.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперкомплексное_число.

УДК 519.85

Лычко Н. А.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

***Аннотация.** В данной статье рассматриваются задачи на выбор портфеля ценных бумаг. Представлена теоретическая основа для решения задач, а также рассмотрены задачи выбора портфеля ценных бумаг.*

***Ключевые слова:** вероятность, инвестор, портфель ценных бумаг, прибыль, ценные бумаги.*

Инвесторы начали формировать портфель ценных бумаг в то же время, когда появились сами ценные бумаги. Определение методов инвестиционного менеджмента берет свое начало в 20-х годах XX века с формирования понятия «настоящей» цены ценной бумаги. Раньше цель инвестора всегда состояла в том, чтобы купить недооцененные ценные бумаги, рыночная стоимость которых в момент совершения сделки ниже настоящей и продать переоцененные, вследствие чего получить

наибольшую прибыль. В настоящее время цель инвестора заключается в том же самом.

Рассмотрим различные примеры по работе с акциями.

Пример 1. Нахождение стандартного отклонения доходности акции. Определить выборочное стандартное отклонение доходности акций, если за первый год ее доходность составила минус 7%, за второй год – 15%, за третий – 16%, за четвертый – 22%, за пятый – 14%.

Решение. Определим среднюю доходность акции по формуле $\bar{r} = \sum_{i=0}^n r_i / n$, где \bar{r} определяет среднюю доходность акции, n – число промежутков времени, за которые наблюдались значения доходности. Тогда подставляя в числитель сумму процентов за расчетный период, а в знаменатель количество промежутков расчетного периода получим, что средняя доходность акций за пять лет составит 12%:

$$\bar{r} = \frac{-7 + 15 + 16 + 22 + 14}{5} = 12\%.$$

Вычислим дисперсию доходности по формуле: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 / n$,

где в числителе находится сумма квадратов разности между годовой доходностью и средней доходностью акций, а в знаменателе – количество лет расчетного периода. Подставляя значения этих показателей, вычислили, что дисперсия доходности составляет 98:

$$\sigma^2 = \frac{(-7 - 12)^2 + (15 - 12)^2 + (16 - 12)^2 + (22 - 12)^2 + (14 - 12)^2}{5} = 98.$$

Найдем выборочное стандартное отклонение доходности акции, извлекая квадратный корень из дисперсии доходности: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Тогда получим $\sigma = \sqrt{98} = 9,899(\%)$.

Чем выше стандартное отклонение доходности акции, тем более рискованной является данная акция. Соответственно, при формировании пакета акций в целях минимизации рисков необходимо учитывать стандартное отклонение доходностей по каждой из акций.

Пример 2. Пусть три бумаги представляют собой совокупность рискованных активов. Значение 0,3 соответствует стандартному отклонению доходности первой бумаги, 0,15 – второй, 0,2 – третьей. Ожидаемые доходности бумаг выглядят следующим образом: $\bar{r}_1 = 0,13$; $\bar{r}_2 = 0,19$; $\bar{r}_3 = 0,23$; $\bar{r}_0 = 0,08$; $\bar{r}_0 = 0,08$, где \bar{r}_0 – ставка без риска. Величина ковариации первой и второй бумаг равна 0,048, первой и третьей

– 0,056, второй и третьей – 0,108. Установить долю бумаг в кредитном портфеле, если его ожидаемая доходность равна 0,1.

Решение. Всего в портфель входит четыре бумаги: три рискованных и одна без риска. Портфель с необходимым уровнем ожидаемой доходности определим, решая задачу минимизации:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \theta_i \cdot \theta_j \cdot \text{cov}_{ij} \rightarrow \min .$$

Составим ограничения: суммарный удельный вес всех бумаг равен $\sum_{i=0}^3 \theta_i = 1$. Ожидаемая доход-

$$\text{ность портфеля } (\bar{r}_p) : \sum_{i=0}^3 \theta_i \cdot \bar{r}_i = \bar{r}_p .$$

Для решения задачи минимизации с ограничениями запишем функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \theta_i \cdot \theta_j \cdot \text{cov}_{ij} + \lambda_1 \cdot \left(\sum_{i=0}^3 \theta_i \cdot \bar{r}_i - \bar{r}_p \right) + \lambda_2 \cdot \left(\sum_{i=0}^3 \theta_i - 1 \right).$$

Для рассматриваемой задачи функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \theta_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \theta_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \theta_3^2 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \text{cov}_{1,2} + 2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot \text{cov}_{1,3} + 2 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \text{cov}_{2,3} + 2 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \text{cov}_{2,3} + \lambda_1 \cdot (\theta_0 \cdot \bar{r}_0 + \theta_1 \cdot \bar{r}_1 + \theta_2 \cdot \bar{r}_2 + \theta_3 \cdot \bar{r}_3 - \bar{r}_p) + \lambda_2 \cdot (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1).$$

Частные производные функции Лагранжа по всем θ_i запишутся:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \lambda_1 \cdot r_0 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 2 \cdot \theta_1 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \theta_2 \cdot \text{cov}_{1,2} + 2 \cdot \theta_3 \cdot \text{cov}_{1,3} + \lambda_1 \cdot \bar{r}_1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 2 \cdot \theta_2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \theta_1 \cdot \text{cov}_{1,2} + 2 \cdot \theta_3 \cdot \text{cov}_{2,3} + \lambda_1 \cdot \bar{r}_2 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 2 \cdot \theta_3 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot \theta_1 \cdot \text{cov}_{1,3} + 2 \cdot \theta_2 \cdot \text{cov}_{2,3} + \lambda_1 \cdot \bar{r}_3 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \theta_0 \cdot \bar{r}_0 + \theta_1 \cdot \bar{r}_1 + \theta_2 \cdot \bar{r}_2 + \theta_3 \cdot \bar{r}_3 - \bar{r}_p = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

С учетом исходных данных получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot 0,08 + \lambda_2 = 0, \\ 2 \cdot \theta_1 \cdot 0,3^2 + 2 \cdot \theta_2 \cdot 0,048 + 2 \cdot \theta_3 \cdot 0,056 + \lambda_1 \cdot 0,13 + \lambda_2 = 0, \\ 2 \cdot \theta_2 \cdot 0,15^2 + 2 \cdot \theta_1 \cdot 0,048 + 2 \cdot \theta_3 \cdot 0,108 + \lambda_1 \cdot 0,19 + \lambda_2 = 0, \\ 2 \cdot \theta_3 \cdot 0,2^2 + 2 \cdot \theta_1 \cdot 0,056 + 2 \cdot \theta_2 \cdot 0,108 + \lambda_1 \cdot 0,23 + \lambda_2 = 0, \\ \theta_0 \cdot 0,08 + \theta_1 \cdot 0,13 + \theta_2 \cdot 0,19 + \theta_3 \cdot 0,23 - 0,1 = 0, \\ \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Решая систему линейных уравнений, получаем

$$\theta_0 = 0,8826; \quad \theta_1 = -0,0649; \quad \theta_2 = 0,1026; \quad \theta_3 = 0,0797.$$

Отрицательное значение удельного веса первой бумаги говорит о том, что следует финансировать покупку остальных бумаг за счет продажи первой.

Литература

1. Буренин, А. Н. Управление портфелем ценных бумаг / А. Н. Буренин. – М.: Издательство «НТО им. акад. С. И. Вавилова», 2008. – 440 с.
2. Шапкин, А. С. Управление портфелем инвестиций ценных бумаг / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Издательство «Дашков и К», 2018. – 512 с.
3. Шапкин, А. С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А. С. Шапкин. – М.: Издательство «Дашков и К», 2003. – 544 с.

УДК 519.85

Малинина М. С.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

***Аннотация.** В данной статье рассматривается задача нелинейного программирования. Представлена теоретическая основа для решения задачи, а также разобрана частная задача нелинейного программирования с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.*

***Ключевые слова:** нелинейное программирование, целевая функция, система ограничений, линия уровня, нормаль, экстремум функции.*

В настоящее время задачи увеличения масштабов производства, перехода на новую технологию, оптовой торговли, планирования обслуживания и т. д. заведомо не являются линейными. В таких случаях применяется нелинейное программирование.

Общей задачей нелинейного программирования являются задачи, в которых либо целевая функция, либо система ограничений (либо та и другая) содержат выражения нелинейные относительно переменных.

Задача нелинейного программирования заключается в нахождении глобального экстремума целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных или нелинейных неравенств.

Некоторые задачи нелинейного программирования удобно решать графически. Необходимо найти точку области допустимых решений, через которую проходит линия наивысшего (наинизшего) уровня.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.

Найти глобальный экстремум функции $z = x - y - 5$

$$\text{при ограничениях: } \begin{cases} (x-1) \cdot y \leq 1; \\ x + y \geq 3,5; \\ 0 \leq x \leq 5; \\ 0 \leq y \leq 5. \end{cases}$$

Область допустимых решений заданной функции – две выделенные части, каждое множество выпукло. В нее входит область, расположенная ниже графика функции $y = \frac{1}{x-1}$ (ветвь гиперболы) и выше графика функции $x + y = 3,5$ (прямая). Области допустимых решений представляют фигуры $ABCD$ и $KLMN$, которые выделены на рисунке.

$$\text{Решаем систему: } \begin{cases} y = \frac{1}{x-1}; \\ x + y = 3,5. \end{cases}$$

Получаем две пары координат точек, расположенных на границе области допустимых решений: $x_1 = 3; x_2 = 1,5; y_1 = 0,5; y_2 = 2$. Находим координаты остальных точек и обозначим их на рисунке:

$A(5; 0), B(5; 0,25), C(3; 0,5), D(3,5; 0), K(1,5; 2), L(0; 3,5), M(0; 5), N(1,2; 5)$.

Строим линии уровня функции $x - y - 5 = C$. Это есть параллельные прямые.

Вычислим и изобразим на рисунке \vec{n} – нормаль к прямым. Это градиент заданной функции:

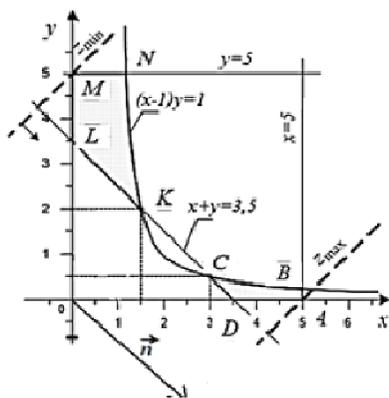
$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (1; -1).$$

Выполним параллельное перемещение линии уровня функции перпендикулярно нормали \vec{n} до точки с наибольшим значением функции в области допустимых решений. Такой точкой является точка $A(5; 0)$ – точка глобального максимума. Также перемещаем линию уровня, но в обратном градиенту направлении. В точке $M(0; 5)$ функция достигает глобального минимума.

Замечаем, что в точках $C(3; 0,5)$ и $K(1,5; 2)$ достигаются наименьшее и наибольшее значения функции соответственно. Это есть локальные минимум и максимум функции.

Зная координаты точек, вычислим значение функции $z = x - y - 5$ в данных точках: $z_A = 0$; $z_B = -0,25$; $z_C = -2,5$; $z_D = -1,5$; $z_K = -5,5$; $z_L = -8,5$; $z_M = -10$; $z_N = -8,8$.

Таким образом, глобальный максимум функции $z = x - y - 5$ достигается в точке $A(5; 0)$ и равен $z_A = 0$, а глобальный минимум функции $z = x - y - 5$ достигается в точке $M(0; 5)$ и равен $z_M = -10$. А локальный минимум функции $z = x - y - 5$ достигается в точке $C(3; 0,5)$ и равен $z_C = -2,5$, значение целевой функции в точке C меньше, чем значение ее в соседних вершинах B и D . Локальный максимум функции $z = x - y - 5$ достигается в точке $K(1,5; 2)$ и равен $z_K = -5,5$, значение целевой функции в точке K больше, чем значение ее в соседних вершинах L и N .



Нелинейное программирование – это раздел математического программирования, изучающий методы решения таких экстремальных задач, в которых результаты возрастают или убывают не пропорционально изменению масштабов использования ресурсов из-за деления издержек производства на предприятиях на переменные и условно-постоянные, из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую из-за влияния внешней экономики, внешних издержек и т. д. Нелинейное программирование достаточно широко используется в экономике, что облегчает процессы управления, планирования, оптимизации производства.

Литература

1. Аттетков, А. В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 440 с.
2. Методы оптимальных решений: учеб. пособие / Л. Н. Фефанова, И. А. Тарасова, О. А. Авдеюк и др. – Волгоград: ВолгГТУ, 2012. – 104 с.
3. Карманов, В. Г. Математическое программирование: учеб. пособие / В. Г. Карманов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

УДК 519.85

Малинина М. С.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация. В статье рассмотрена экономическая задача, относящаяся к задачам нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений. Для решения задачи используется градиентный метод Франка-Вулфа.

Ключевые слова: нелинейное программирование, целевая функция, система ограничений, градиент функции, экстремум функции.

В настоящее время очень важно уметь управлять, планировать, принимать рациональные решения в тех или иных ситуациях, особенно на производстве. Большинство экономических ситуаций сводится к реше-

нию задач оптимизации. В таких случаях находит применение нелинейное программирование. Для решения задач нелинейного программирования нет универсальных методов решения, поэтому разрабатывают методы, которые предназначаются для решения определенного класса задач.

Рассмотрим экономическую задачу нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений, используя градиентный метод.

Имеем задачу. Фирма выпускает изделия двух видов (изделия A и B). Для изготовления изделий используется платина и палладий. Для выпуска одного изделия A необходимо 15 г платины и 10 г палладия, для выпуска изделия B – 9 г платины и 13 г палладия. Фирма может использовать не более 92 г платины и не более 90 г палладия. Цена изделия A составляет 14 тыс. ден. ед., изделия B – 12 тыс. ден. ед. Величины себестоимости представлены в виде формул: себестоимость одного изделия A : $7 + 0,2x_1$, где x_1 – объем производства изделий A ; себестоимость одного изделия B : $8 + 0,2x_2$, где x_2 – объем производства изделий B .

Требуется составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Пусть x_1 и x_2 – объемы производства изделий A и B . Решение задачи будет найдено в случае увеличения целевой функции при переходе не более, чем на 700 денежных единиц.

Для начала необходимо определить целевую функцию и ограничения. Целевая функция есть выражение прибыли от производства всех изделий A и B . Прибыль от продажи одного изделия рассчитывается как разность цены изделия и его себестоимости. Тогда получим следующую функцию:

$$F = ((14 - (7 + 0,2x_1)) \cdot x_1) + ((12 - (8 + 0,2x_2)) \cdot x_2) = 7x_1 - 0,2x_1^2 + 4x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max.$$

Зная, что предприятие имеет возможность использовать определенное количество составляющих элементов, составим систему ограничений:

$$\begin{cases} 15x_1 + 9x_2 \leq 92; \\ 10x_1 + 13x_2 \leq 90; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Получим задачу нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений. Для решения данного типа задач уместнее использовать метод Франка-Вулфа. Решение задачи необходимо начать с поиска множества допустимых решений. Чтобы найти начальные допустимые решения, опустим нелинейные

элементы из функции, тем самым получим задачу уже линейного программирования. Решаем ее симплекс-методом. Имеем следующее допустимое решение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)})$; $x_1^{(0)} = 6,13; x_2^{(0)} = 0$. Тогда значение целевой функции будет равно $F^{(0)} = 7 \cdot 6,13 - 0,2 \cdot 6,13^2 + 4 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0^2 = 35,39$. Решение задачи будем искать с помощью итерационного алгоритма Франка-Вулфа.

Итерация №1. Найдем градиент целевой функции в точке

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}); \text{grad}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (7 - 0,4x_1; 4 - 0,4x_2);$$

$$x_1^{(0)} = 6,13; x_2^{(0)} = 0; \text{grad}F(x^{(0)}) = (7 - 0,4 \cdot 6,13; 4 - 0,4 \cdot 0) = (4,548; 4).$$

Определим угловую точку области допустимых решений. Снова решаем задачу линейного программирования симплекс-методом, приняв исходную систему ограничений и целевую функцию с коэффициентами, равными координатам градиента: $f = 4,548x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$. Получим следующее решение: $x_1^{(*)} = 3,676, x_2^{(*)} = 4,095$. То есть поиск нового решения будет выполняться в направлении к точке $x^{(*)} = (3,676; 4,095)$.

Составим уравнения для перехода к новому решению $x^{(1)} = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$: $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \lambda(x_1^{*} - x_1^{(0)}); x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \lambda(x_2^{*} - x_2^{(0)})$. Имеем: $x_1^{(1)} = 6,13 + \lambda(3,676 - 6,13) = 6,13 - 2,454\lambda$; $x_2^{(1)} = 0 + \lambda(4,095 - 0) = 4,095\lambda$.

Значения для перехода к новому решению подставим в целевую функцию F с целью обеспечения максимального ее значения. Получим следующее уравнение:

$$F = 7 \cdot (6,13 - 2,454\lambda) - 0,2 \cdot (6,13 - 2,454\lambda)^2 + 4 \cdot 4,095\lambda - 0,2 \cdot (4,095\lambda)^2 = -1,204\lambda^2 + 5,215\lambda + 32,042.$$

Из условия $\frac{dF}{d\lambda} = 0$ находим λ : $-2,408\lambda + 5,215 = 0$. Отсюда $\lambda = 2,166$. Имеем новое решение $x_1^{(1)} = 6,13 - 2,454 \cdot 1 = 3,676$, $x_2^{(1)} = 4,095 \cdot 1 = 4,095$.

Значение целевой функции для текущего решения равно: $F = 7 \cdot 3,676 - 0,2 \cdot 3,676^2 + 4 \cdot 4,095 - 0,2 \cdot 4,095^2 = 36,06$. Округлив значения, получим следующие результаты:

$$x_1^{(1)} = 3; x_2^{(1)} = 4; F = 7 \cdot 3 - 0,2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4 - 0,2 \cdot 4^2 = 32.$$

Проверим условие окончания алгоритма. Для этого вычислим величину изменения целевой функции в результате выполнения итерации и сравним полученное значение с заданной точностью ε . По заданному самостоятельно условию значение ε будем считать равным 0,7. Тогда

$F = F^{(1)} - F^{(0)} = 36,06 - 35,39 = 0,67$. Если условие $F \leq \varepsilon$ выполняется, то можно считать данное значение оптимальным. В нашем случае $0,67 < 0,7$. Выполняется условие окончания итерационного алгоритма. То есть найдено оптимальное решение.

Таким образом, можно предположить, что предприятию следует выпустить 3 изделия вида A и 4 изделия вида B , чтобы получить максимальную прибыль, равную 32 тысячам денежных единиц.

Литература

1. Смородинский, С. С. Оптимизация решений на основе методов и моделей мат. программирования: учеб. пособие по курсу «Систем. анализ и исслед. операций» для студ. спец. «Автоматизир. системы обраб. информ.» дневн. и дистанц. форм обуч. / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Мн.: БГУИР, 2003. – 136 с.

2. Методы оптимальных решений: учеб. пособие / Л. Н. Феофанова, И. А. Тарасова, О. А. Авдеюк и др. – Волгоград: ВолгГТУ, 2012. – 104 с.

УДК 519.6

Малинина М. С.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ РОЗЕНБРОКА

Аннотация. В статье представлены решение задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных методом Розенброка, а также теоретическая основа решения задач данным методом.

Ключевые слова: итерация, ортогональный вектор, экстремум функции, коэффициенты растяжения и сжатия, длина шага.

Многие системы автоматизации включают в большинстве случаев достаточное количество входных факторов и дополнительных ограничений, что требует использования методов многомерной условной (безусловной) оптимизации. Метод вращающихся координат, или метод Розенброка, представляет собой итерационную процедуру, при которой с изменением стремления к убыванию целевой функции происходит вращение системы координат [1]. Зная направление преимущественного убывания, можно установить новое направление одной из осей. Положение остальных осей получаем при помощи метода ортогональности

Грама-Шмидта, суть которого состоит в том, что каждый новый ортогональный вектор будет равен вектору, скорректированному на величины проекций текущего вектора на предыдущие ортогональные векторы. Другими словами, первая итерация предусматривает осуществление поиска вдоль координатных осей из начальной точки $X^{(1)}$, при которой получаем точку $X^{(2)}$. Далее совершаем вариацию направлений. Новый вектор $\hat{S}_1^{(2)}$ будет равен вектору перехода из точки $X^{(1)}$ в точку $X^{(2)}$, а вектор $\hat{S}_2^{(2)}$ строим ортогонально. Для поиска имеется возможность использования одномерной оптимизации или дискретного шага.

Решим задачу с использованием метода дискретного шага. Необходимо минимизировать функцию $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$. Функция достигает минимума в точке $X^* = [2; 1]^T$, где $f(X^*) = 0$. Задаем начальные параметры. Начальная точка $X^{(0)} = [2, 5; 2, 5]^T$, начальная длина шага $\lambda_1 = 0,5; \lambda_2 = 0,5$; коэффициенты растяжения и сжатия $\alpha = 3, \beta = -0,5$. Причем наблюдается совпадение направлений направлений начального поиска с координатными осями x_1, x_2 : $\hat{S}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{S}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Выполним пробные шаги вдоль осей. Если значение функции в полученной точке меньше значения функции в начальной точке, то примем данную систему координат в качестве «удачной» и увеличим величину шага, умножив его на коэффициент α , иначе примем систему в качестве «неудачной», умножив на β . Далее новое значение сравниваем с предыдущим. Результаты I итерационного этапа представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты ряда циклов поиска первого итерационного процесса

I итерационный процесс					
№	x_1	x_2	λ	$f(x)$	успех (S) или неудача (F)
0	2,50	2,50		6,313	
1	3,00	2,50	0,500	5,000	S
2	3,00	3,00	0,500	10,000	F
3	4,50	2,50	1,500	39,313	F
4	3,00	2,25	-0,250	3,250	S
5	2,25	2,25	-0,750	5,066	F
6	3,00	1,50	-0,750	1,000	S
7	3,38	1,50	0,375	3,715	F
8	3,00	-0,75	-2,250	31,250	F

Таблица 2. Результаты поворота осей

Поворот осей			
	x_1	x_2	$f(x)$
	3,00	1,50	1,000
λ	0,50	-1,00	
$a_1^{(0)}$	0,50	-1,00	
$a_2^{(0)}$	0,00	-1,00	
$b_2^{(0)}$	-0,40	-0,21	
$\hat{S}_1^{(1)}$	0,45	-0,89	
$\hat{S}_2^{(1)}$	-0,89	-0,47	

Так как после удаи в каждом координатном направлении следует неудача, то закончим поиск. Для следующего этапа поиска необходимо сменить направления осей. Результаты поворота осей приведены в табл. 2.

Аналогично I этапу продолжим поиск решения. Имеем табл. 3 с результатами.

Таблица 3. II итерационный процесс

II итерационный процесс					
№	x_1	x_2	λ	$f(x)$	успех (S) или неудача (F)
	3,00	1,50		1,000	S
1	3,22	1,05	0,5	3,470	F
2	2,56	1,27	0,5	0,098	S
3	2,45	1,49	-0,25	0,322	F
4	1,23	0,57	1,5	0,361	F

В точке № 4 закончим II итерационный процесс. В качестве оптимального решения примем точку №2 $X^{(2)} = [2,56; 1,27]^T$; $f(X^{(2)}) = 0,098$.

Теперь должно быть определено новое направление поиска. На этом остановим поиск решения. Алгоритм Розенброка наиболее эффективен при решении сложных оптимизационных задач. Основной целью данного метода является устранение проблемы чувствительности к выбору системы координат. Данный метод решения задач сочетает в себе вращение координат и регуляцию шага в зависимости от рельефа поверхности уровня.

Проводится численное исследование метода Розенброка на тестовых функциях с помощью программы, написанной на языке программирования Паскаль, и численное сравнение с результатами, полученными с помощью алгоритма поиска по деформируемому многограннику в подпространствах [2].

Литература

1. Химмельблау, Д. М. Прикладное нелинейное программирование / Д. М. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
2. Меркурьев, В. В. Алгоритм поиска по деформируемому многограннику в подпространствах / В. В. Меркурьев, Ф. А. Пайзерова // Автоматизация поискового конструирования. Тезисы докладов I Всесоюзной конференции. Йошкар-Ола, 1978. – С. 159-161.

УДК 517.9

Милкова А. А., Салихова Л. М., ст. преподаватель
Поволжский государственный технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Аннотация.** Рассматривается история возникновения и способы применения дифференциальных уравнений.*

***Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, дифференциальное исчисление.*

Дифференциальное уравнение – это уравнение, в которое входят производные функции и может входить сама функция, независимая переменная и параметры. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен. Производные, функции, независимые переменные и параметры могут как входить в уравнение в различных комбинациях, так могут и отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной. Однако не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным. Например, уравнение $f'(x) = f(f(x))$ не является дифференциальным.

Отличие дифференциальных уравнений от алгебраических состоит в том, что при решении первых ищется функция или семейство функций, а вторых – число или несколько чисел.

Сегодня некоторые исследователи считают задачу решённой, если её удалось свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения, решение которого, в свою очередь, можно найти с помощью современных быстродействующих ЭВМ.

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых требовалось определить координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени при различных воздействиях. К дифференциальным уравнениям приводили также некоторые рассмотренные в то время геометрические задачи.

Основой теории дифференциальных уравнений стало дифференциальное исчисление, созданное Лейбницем и Ньютоном. Термин «дифференциальное уравнение» был предложен Лейбницем в 1676 году.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Жозеф Лиувилль построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в частности таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже Софус Ли, анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришёл к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов, получивших впоследствии имя групп Ли, – так по теории дифференциальных уравнений возникла одна из самых плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами.

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начался с работ Анри Пуанкаре. Созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» или, как теперь её чаще называют, теория динамических систем, легла в основу современной топологии. На сегодняшний день она активно развивается и применяется в естествознании.

Ниже представлены примеры дифференциальных уравнений и вид их решения.

$$y^{11} + 9y = 0.$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решением является семейство функций

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

C_1 и C_2 – произвольные константы, которые для конкретного решения определяются из задаваемых отдельно начальных условий. Это уравнение, в частности, описывает движение гармонического осциллятора с циклической частотой, равной 3.

Второй закон Ньютона можно записать в форме дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t),$$

где m – масса тела, x – его координата, $F(x, t)$ – сила, действующая на тело с координатой x в момент времени t . Его решением является траектория движения тела под действием указанной силы.

Дифференциальное уравнение Бесселя – обыкновенное линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2)y = 0.$$

Его решениями являются так называемые цилиндрические функции – функции Бесселя, Неймана, Ганкеля.

Пример неоднородного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1.$$

В следующей группе примеров неизвестная функция u зависит от двух переменных x и t или x и y .

Однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Одномерное волновое уравнение – однородное линейное уравнение в частных производных гиперболического типа второго порядка с постоянными коэффициентами, описывает колебание струны, если $u = u(x, t)$ – отклонение струны в точке с координатой x в момент времени t , а параметр a задаёт свойства струны:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Уравнение Лапласа в двумерном пространстве – однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами, возникающее во многих физических задачах механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение Кортевега – де Фриза, нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, описывающее стационарные нелинейные волны, в том числе солитоны:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Литература

1. Дифференциальное уравнение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://is.gd/BwmlUv>, свободный ресурс доступа.
2. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми, перевод А. Д. Мышкиса. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
3. Примеры решения дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://is.gd/TavpzS>, свободный ресурс доступа.

УДК 501

Милютин Д. А.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЕГИПЕТСКОЙ ПИРАМИДЫ

Аннотация. Представлен расчёт пирамиды, пропорциональной известной пирамиде Хеопса.

Ключевые слова: расчет, пирамида, число Фибоначчи.

В древнем Египте одной из самых уважаемых наук была математика. Египетские строители времен Древнего Царства возвели пирамиды плато Гизы с идеальной симметричностью и точностью. Наиболее крупными сооружениями Гизы являются пирамиды Хеопса, Хефрена и Микерина. основополагающей мерой в архитектуре, живописи и науке и в древности и сейчас считается Золотое сечение. Вершины самых больших пирамид Гизы лежат на спирали Золотого сечения. Эти сооружения расположены в рамках математической гармонии: фотографии с воздуха показывают, что пирамиды Хеопса, Хефрена и Микерина лежат на линии, четко соответствующей спирали Фибоначчи.

Гармоничность и величественность пирамид Древнего Царства вызвали восхищение и благоговение египтян и греков, их считали одним из семи чудес света.

Мы рассмотрим самую высокую из пирамид комплекса Гизы – пирамиду Хеопса.

Основные характеристики пирамиды Хеопса:

- высота – 138,7 метра, изначальная высота – 146,6 м;
- длина боковой грани по подсчетам (изначально) – 230,3 м;
- длина сторон основания пирамиды: юг – 230,45 м, север – 230,25 м, запад – 230,35 м, восток – 230,4 м;
- площадь основания — 5,3 га;
- периметр – 921,45 метра;
- средняя масса каменных блоков – 2,5 тонны;
- самый тяжелый каменный блок – 15 тонн;
- количество блоков – около 2,5 млн. штук;
- общий вес пирамиды – около 6,5 млн. тонн;
- широта, на которой находится пирамида – 30°.

Конструкция Великой Пирамиды основана на пропорции Фи = 1,618. Хемун, племянник фараона Хеопса, считающийся архитектором великой пирамиды, воплотил в камне основные принципы сакральной геометрии:

Периметр основания пирамиды равен длине окружности, радиус которой равен высоте пирамиды ($2 \times 3,14159 \times 146,6 = 921$).

Сумма четырёх сторон пирамиды – 921,45 метра равна половине минуты широты экватора. Один градус широты на экваторе покрывает 110573 м, а каждая дуговая минута – 1842,88 м, что вдвое больше периметра пирамиды.

Длина грани пирамиды, делённая на высоту, даёт соотношение Фи = 1,618.

Если через пирамиду провести две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через центр, получатся два двойных «золотых треугольника», пересечение которых даёт крест в квадрате – один из основных эзотерических символов Древнего Египта.

Длина стороны основания, выраженная в египетских «локтях» (одно из значений – 0,635 м), соответствует продолжительности земного года ($230/0,63 = 365$).

Периметр основания пирамиды Хеопса, делённый на удвоенную высоту даёт приближение числа «Пи» – $3,1415... (921,45/2 \times 146,6 = 3,142)$.

Пирамида является примером подлинной квадратуры круга – задачи, превосходно решённой древними архитекторами, сумевшими построить квадрат, равновеликий кругу.

Площадь каждой из граней пирамиды равна квадрату ее высоты.

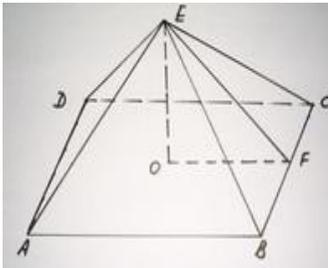
Если умножить изначальную высоту Великой Пирамиды – 146,6 м на один миллион, получается наименьшее расстояние от Земли до Солнца – 147000000 км.

Соотношение изначальной высоты Великой пирамиды к ее основанию равнялось 7:11. Это соотношение имеет ряд важных геометрических свойств. В нем скрыты числа «Пи» и «Фи».

Высота в футах – 484,4 соответствует 5813 дюймам (5-8-13) – числа из последовательности Фибоначчи.

Верхняя северная и нижняя южная шахты построены по диагоналям прямоугольников, описанных вокруг пирамиды.

На основе данных величин можем вывести формулы для расчета пирамиды, подобной пирамиде Хеопса (рисунок):



$a = h * \Phi$, где a – сторона основания; h – высота пирамиды; Φ – число Фибоначчи, равное 1,618.

$P/(2*h)=\pi$, где P – периметр основания пирамиды; h – высота пирамиды.

$S=H^2$, где S – площадь каждой грани пирамиды; H – высота грани пирамиды.

$L/H=\Phi$, где Φ – число Фибоначчи, равное 1,618; L – длина грани; H – высота пирамиды. Чтобы рассчитать нужное количество

блоков для строительства пирамиды, необходимо использовать формулу, которой пользовались древнеегипетские строители:

$N = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, где N – количество блоков; n – количество слоев.

Таким образом, на основе измеренных величин пирамиды Хеопса, мы вывели формулы для расчета такой же по пропорциям пирамиды и количества блоков, нужных для постройки пирамиды.

Литература

1. <https://zhitanska.com/content/sakralnaya-geometriya-velikoj-piramidy-gizy/>.

Посошнова К. Д., Филонова М. В., Журавлев Е. А.
Поволжский государственный технологический университет

ОБ ОДНОЙ МАЛОИЗВЕСТНОЙ РАБОТЕ ЭЙЛЕРА

Выполнен перевод и анализ работы Л. Эйлера «Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper» Берлинского периода его жизни (1741-1766). Работа посвящена вопросам алгебраической геометрии и на русский язык переводится впервые.

Ключевые слова: Эйлер, Берлинская академия, алгебраические кривые, исключение переменной, основная теорема алгебры, количество точек пересечения, формулы Виета.

Леонард Эйлер (1707-1783) – крупнейший европейский математик XVIII века. Родился и получил образование в Швейцарии, с 1727 по 1741 гг. работал в Петербургской Академии наук. После смерти императрицы Анны Иоанновны, когда Академия приходит в упадок и положение её служащих «...начало представляться неуверенным» [1], Эйлер был вынужден в 1741 г. перебраться в Берлин. В 1766 г. он по личному приглашению Екатерины II возвращается в Санкт-Петербург, где продолжает научную деятельность в Академии до своей кончины в 1783 г.

Работа, перевод которой нами выполнен, относится к Берлинскому периоду жизни Эйлера. Впервые она была опубликована в трудах Берлинской академии наук в 1750 г. на французском языке [2] под названием «Доказательство, касающееся числа точек, в которых могут пересекаться кривые произвольного порядка». В электронном архиве работ Эйлера нам удалось отыскать французский оригинал статьи и её английский перевод [3], последний и был использован для русского перевода. Наш перевод размещен в свободном доступе на корпоративном диске ПГТУ О:\кафПМиИТ\НИРС\Перевод_E148_26фвр2019. Данная работа переводится и публикуется на русском языке впервые.

Прежде чем перейти к анализу содержания работы, отметим, что ко времени её создания европейские математики уже использовали комплексные числа, была доказана Даламбером [4] «основная теорема алгебры», было известно следствие из неё о разложении многочлена на линейные множители, а также установлена связь между коэффициентами многочлена и однородными симметричными формами, составленными из его корней (формулы Виета).

Математическая символика работы почти не отличается от современной. Замена x^2 на произведение xx , по-видимому, связана с трудностями типографского набора и не сохранена в нашем переводе.

Во вводной части работы Эйлер формулирует следующую задачу: доказать, что две произвольные алгебраические кривые, одна – порядка m , а другая – n , уравнения которых

$$ay^m - (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fx^2)y^{m-2} + \dots = 0, \quad (1)$$

$$ay^n + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2)y^{n-2} + \dots = 0, \quad (2)$$

не совпадают и не содержат общих множителей, могут пересекаться не более чем в mn точках.

Затем Эйлер демонстрирует справедливость данного утверждения для некоторых классов частных случаев, используя один и тот же прием – формальное исключение переменной y из (1) и (2). Демонстрации начинаются с тривиального случая $m = 1$, когда (1) принимает вид $ay + b + cx = 0$, и подстановка $y = (b + cx)/a$ превращает (2) в уравнение, «степень x в котором не превышает n . Ввиду того что каждое пересечение соответствует корню x этого уравнения, ясно, что число пересечений равно числу корней n , когда все корни уравнения действительны, и будет меньше, если некоторые из них мнимые». Затем подобные рассуждения выполняются для случаев, когда (1) или (2) «с помощью переноса или поворота осей» приводится к параболической форме $y - ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots = 0$ или к произведению таких форм. Завершает демонстрации случай $m = n = 3$.

После этого Эйлер переходит к доказательству общего случая, используя для уравнений кривых (1) и (2) более компактную форму записи

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} - R y^{m-3} + S y^{m-4} - \dots = 0, \quad (3)$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} - \dots = 0, \quad (4)$$

где $P(x)$ и $p(x)$, $Q(x)$ и $q(x)$, $R(x)$ и $r(x)$, $S(x)$ и $s(x)$, ... – многочлены степеней 1, 2, 3, 4, ...

Левые части (3) и (4) разлагаются на линейные множители:

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D) \dots = 0 \quad \text{и} \quad (5)$$

$$(y - a)(y - b)(y - c)(y - d) \dots = 0, \quad (6)$$

где A, B, C, D, \dots – корни уравнения (3), а a, b, c, d, \dots – корни уравнения (4), которые рассматриваются как некоторые функции переменной x .

Дальнейшее рассуждение Эйлера носит комбинаторный характер. Уравнения (5) и (6) выполняются одновременно, если: $y = A = a$, или $y = A = b$, или $y = A = c$, ... , или $y = B = a$, или $y = B = b$, или $y = B = c$, ... и т. д. Таким образом, максимальное число таких условий составляет m (число корней (5)) \times n (число корней (6)), а значит, таким же будет и наибольшее число точек пересечения кривых (1) и (2).

Не останавливаясь на этом принципиальном результате, Эйлер предлагает конструктивный метод исключения y из уравнений (3), (4), основанный на использовании формул Виета. Выше перечисленные mn условий пересечения он записывает в виде единого равенства, которое не содержит переменную y

$$(A - a)(A - b)(A - c)(A - d) \dots (B - a)(B - b)(B - c)(B - d) \dots \dots (C - a)(C - b)(C - c)(C - d) \dots = 0, \quad (7)$$

и составлено из mn сомножителей-скобок, или, с учетом (6) и (4), в виде

$$\begin{aligned} & (A^n - p A^{n-1} + q A^{n-2} - r A^{n-3} + s A^{n-4} - \dots) \\ & (B^n - p B^{n-1} + q B^{n-2} - r B^{n-3} + s B^{n-4} - \dots) \\ & (C^n - p C^{n-1} + q C^{n-2} - r C^{n-3} + s C^{n-4} - \dots) \\ & \dots \dots \dots = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где число сомножителей-скобок равно m , а $p, q, r, s \dots$ – заданные многочлены от x .

Здесь при одинаковых степенях корней $A, B, C \dots$ стоят одинаковые коэффициенты, поэтому после раскрытия в (8) скобок и приведения подобных получается сумма симметричных однородных форм переменных $A, B, C \dots$ степеней от 1 до mn . Эйлер указывает, что все эти формы, составленные из корней A, B, C, \dots уравнения (3) могут быть выражены через заданные многочлены $P, Q, R \dots$ – коэффициенты уравнения (3) при помощи формул Виета:

$$A + B + C + \dots = P, \quad AB + AC + AD + \dots = Q, \quad ABC + ABD + \dots = R, \dots$$

В результате левая часть (8) принимает форму многочлена переменной x степени mn .

В заключение в качестве примера Эйлер демонстрирует предложенный метод исключения переменной y для уравнений двух произвольных кубических кривых: $y^3 - P y^2 + Q y - R = 0$ и $y^3 - p y^2 + q y - r = 0$.

Литература

1. Эйлер, Леонард: Материал из Википедии – свободной энциклопедии https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4.
2. Euler, L. Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper // Memoires de l'academie des sciences de Berlin. – Berlin, 1750. – v. 4. – P. 234-248.
3. The Euler Archive, E148 – «Proof concerning the number on points where two lines of ordinary order can intersect» <http://eulerarchive.maa.org/>.
4. D'Alembert. Recherches sur le calcul intégral // Memoires de l'academie royale des sciences et des belles lettres. – Berlin, 1748. – v. 2. – P. 182-224.

Раджабов В. О., Салихова Л. М., ст. преподаватель
Поволжский государственный технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МЕДИЦИНЫ

Аннотация: ознакомление со способом решения дифференциального уравнения на примере размножения бактерий.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, закон размножения бактерий, экспоненциальный закон размножения.

Дифференциальные уравнения занимают важное место при решении задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими процесс или явление.

Функция $y(x)$ называется решением (или интегралом) дифференциального уравнения на промежутке (a, b) , если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Исследование многих физических и технических задач сводится к решению таких уравнений. С помощью дифференциальных уравнений описывают волновые процессы и колебания, поэтому практическое применение дифференциальных уравнений очень разнообразно.

В задачах медицины дифференциальные уравнения используются, например: для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики; для описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография, для описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных, для определения функции изменения численности популяции микроорганизмов в зависимости от времени.

В качестве примера можно привести закон размножения бактерий с течением времени.

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Найти зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющих в данный момент, через x . Тогда

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

В этом уравнении разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x} = k dt,$$

$$\int \frac{dx}{x} = k \int dt,$$

$$\ln(x) = kt + \ln(C),$$

$$\ln(x) = \ln(e)^{kt} + \ln(C).$$

Потенцируем последнее выражение:

$$x = Ce^{kt}.$$

Полагая, что при $t=0$ $x=x_0$, получим $C=x_0$. Следовательно,

$$x = x_0 e^{kt}.$$

Уравнение выражает закон размножения бактерий с течением времени. Таким образом, при благоприятных условиях увеличение бактерий с течением времени происходит по экспоненциальному закону.

Этот закон представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Он говорит о том, что, создавая для полезной популяции благоприятные условия, можно очень быстро получить популяцию с большей численностью. Весьма показательна в этом смысле история с пенициллином. Когда был открыт этот антибиотик, грибки, его выделяющие, стали выращивать в наилучших условиях. Их неограниченно подкармливали, следили, чтобы им не было тесно, и, конечно, оберегали от вредных видов. Будущий урожай можно было совершенно точно подсчитать по формуле. Размножаясь в соответствии с экспоненциальным законом, пенициллиновые грибки в короткий срок обеспечили весь мир ценным лекарством.

Экспоненциальному закону размножения подчиняется так называемый «экологический взрыв», когда тот или иной биологический вид, попав в благоприятные условия, за короткий срок достигает большой численности. Для примера можно указать на губительные нашествия полчищ насекомых (саранчи, шелкопряда и др.) или на неожиданные последствия акклиматизации кроликов в Австралии.

Литература

1. Дифференциальное уравнение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://is.gd/BwmlUv>.
2. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми, перевод А. Д. Мышкиса. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 352 с.

УДК 501

Сагетова Г. А.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ В АРХИТЕКТУРЕ

Аннотация. *Представлены примеры проектировании сооружений на основе геометрических форм.*

Ключевые слова: *архитектура, геометрия, формы.*

Архитектура как вид изобразительного искусства тесно связана с геометрией. Архитектура окружает нас, формирует эстетическую городскую среду, богатую на многочисленные художественные образы. Тесная связь архитектуры и математики известна давно. Человек всегда стремился к природе, создавая свои произведения на основе природных форм и простых геометрических фигур (рис. 1 и рис. 2).



Рис. 1



Рис. 2

Произведения архитектуры являются частью пространственной структуры города. И при всем разнообразии архитектурных сооружений они почти всегда имеют в своей основе правильную геометрическую форму: призму, пирамиду, конус, шар, параллелепипед. К этим формам

можно добавить правильные многогранники как переходную форму между прямоугольниками и кругами.

На выбор геометрической фигуры, которая может составлять основу объемно-пространственного архитектурного сооружения, влияют такие факторы, как прочность задания, его эстетика, функциональное назначение, ассоциативность и т. п. При этом каждая геометрическая фигура обладает своими индивидуальными свойствами. Например, конус обладает свойством преобразования звуковой волны, проникнувшей в него. Поэтому чтобы снизить шум в помещениях гостиницы в Белоруссии, она была спроектирована в форме конуса. Наиболее прочной фигурой считается пирамида, так как имеет большую площадь основания. Также прочность этой форме придает уменьшение массы при увеличении высоты над уровнем земли.

Формы архитектурных произведений имеют свой образный язык, воздействующий на эмоции и настроение человека. Понятие архитектурной формы тесно связано с понятием архитектурной композиции, в основу которой положена определенная архитектурная идея (система построения, геометрическая форма, тема и т. д.). Геометрическая форма характеризуется размером, геометрическим строением (наличие ребер, граней, характер линии контура видимости и др.), весом, плотностью, прочностью.

Кроме этого, на базе форм различных геометрических тел проектируются и строятся объемы и фасады памятников архитектуры. Часто геометрические формы являются комбинациями различных геометрических тел.

Архитектурные стили имеют также геометрические особенности: египетский стиль – пирамиды; модернизм – призмы; постмодернизм – правильные и полуправильные многогранники; деконструктивизм – невыпуклые многогранники.

Рассмотрим примеры памятников архитектуры, в основе которых заложены основные геометрические формы.

Геометрическое тело	Описание	Пример архитектурного сооружения
Параллелепипед	Параллелепипед – тело, в основании которого лежат параллелограммы. Прямоугольный параллелепипед состоит из шести прямоугольников.	 <p data-bbox="759 1327 968 1348">Загородный дом в Бразилии</p>

Окончание таблицы

<p>Пирамида</p>	<p>Пирамида – многогранник, ограниченный многогранным углом и плоскостью, которая пересекает этот многогранный угол. Эта геометрическая форма обеспечивает наибольшую устойчивость за счет большой площади основания.</p>	 <p>Гостиница в Лас-Вегасе</p>
<p>Цилиндр</p>	<p>Цилиндр – тело, которое ограничено замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями.</p>	 <p>Газгольдеры. Москва</p>
<p>Конус</p>	<p>Конус – тело, ограниченное конической поверхностью, расположенной по одну сторону от вершины и пересекающей ее плоскостью.</p>	 <p>Собор Святого Себастьяна в Рио-де-Жанейро</p>
<p>Пяти-угольник</p>	<p>Примером такой формы может служить здание военного ведомства США, которое носит название Пентагон, что означает пятиугольник.</p>	 <p>Пентагон. США</p>

Таким образом, архитекторам в профессиональной деятельности при создании архитектурного произведения не обойтись без знаний геометрии, а именно знаний определенных свойств геометрических форм.

Литература

1. Архитектура // Геометрия и искусство [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://geometry-and-art.ru/architecture.html>.
2. Геометрия и архитектурные образы зданий и сооружений // mikroArticles.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.microarticles.ru/article/geometrija-i-arhi.....>
3. Иконников, А. В. Функция, форма, образ в архитектуре / под ред. А. В. Иконникова. – М.: Стройиздат, 1986. – 288 с.
4. Геометрические формы в архитектуре [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://sibac.info/studconf/science/xxxiv/88784>.

Салихова Л. М., Стаценко О. В.
Поволжский государственный технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. Ознакомление со способом применения определенных интегралов в медицине.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, шаг интегрирования.

Применение определённых интегралов очень обширно. В основном, мы часто привыкли видеть, как их используют для нахождения площадей плоских фигур или же для вычисления объёмов различных тел, площадей поверхности вращения, а также длины дуг кривых. Множество раз встречались с ними при решении задач по физике. Также они встречаются в медицине, экономике, биологии, космонавтики, архитектуре и многом другом.

Множество задач в медицине не может обойтись без определённых интегралов. К примеру, на сегодня невозможно изучение гемодинамики-движения крови по сосудам без применения интеграла. Так как интегральные характеристики всегда выражают свойства объектов, относящиеся к целой области пространства. Например, путь пройденный телом – это интегральная характеристика, поскольку она характеризует целую траекторию, состоящую из множества точек, а скорость различна в каждой точке траектории и характеризует каждую точку в отдельности. Таким образом, вычислить интегральную скорость для целого сосуда, зная линейную скорость кровотока, довольно-таки просто.

Для этого нужно

1. разбить всю область пространства на отдельные достаточно малые части (например, взаимно перпендикулярными плоскостями). В этом случае мы получим внутри тела множество мелких кубиков, внутри которых дифференциальную характеристику условно считаем неизменной, постоянной.

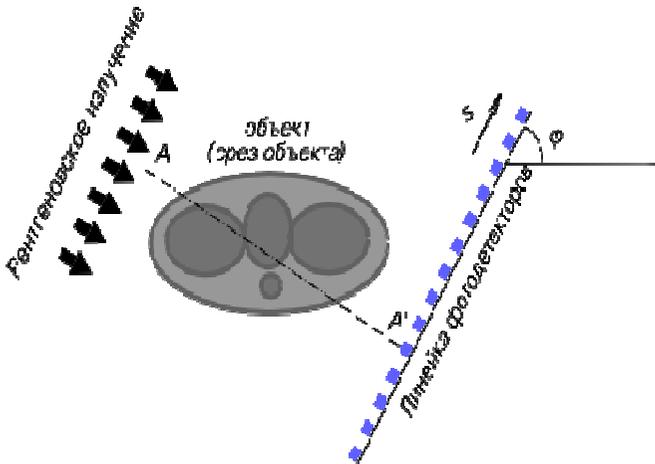
2. умножить значение дифференциальной характеристики внутри каждого кубика на значение объёма этого кубика и просуммировать такие произведения. На этом этапе мы получаем интегральную сумму. Интегральная сумма не равна интегралу в точности, но может служить его приближённым значением.

3. перейти к пределу интегральной суммы, когда объем кубиков разбиения тела стремится к нулю. На этом этапе мы получаем точное значение интеграла линейной скорости.

Также определённый интеграл используется в компьютерной рентгеновской томографии: линейка детекторов измеряет поглощение исследуемым объектом параллельного пучка излучения. В соответствии с законом Бугера-Ламбета-Бера, интенсивность излучения, измеряемая детектором в точке S линейки, пропорциональна $\exp(-\int_{AA'} p(x, y) dz)$, где $p(x, y)$ – показатель поглощения вещества объекта для данного типа излучения, а интеграл берётся вдоль прямой AA' , проходящей через данный детектор и перпендикулярной линейке детекторов, z – координата на этой прямой. Соответственно, логарифм от интенсивности, взятый с обратным знаком, даёт преобразование Радона от показателя поглощения. Вращая систему из источника излучения и детектора вокруг объекта (при этом оставаясь в одной плоскости), показанной на рисунке, получают множество луч – сумм в выбранном срезе объекта. Затем, используя один из методов реконструкции, можно восстановить распределение показателя поглощения в любой точке прозондированной плоскости объекта.

Рассмотрим одну из задач, связанную с медициной.

За первые 13 дней химиотерапии масса опухоли уменьшалась со



скоростью $M'(t) = -0,2t + 0,015t^2$ грамм в день.

Какова масса опухоли на десятый день лечения, если начальная её масса равнялась 180 грамм?

Решение:

$$\begin{aligned} M(10) &= M(0) + \int_0^{10} M'(t) dt = M(0) + \int_0^{10} \left(-0,2 \frac{t^2}{2} + 0,015 \frac{t^3}{3}\right) dt \\ &= 180 + (-0,1 * 10^2 + 0,05 * 10^3) = 175. \end{aligned}$$

Ответ: 175 грамм.

Таким образом, определённый интеграл позволяет вычислять площади сложных фигур, ограниченных любыми кривыми линиями, а также находить объёмы тел, получаемых при вращении криволинейных трапеций вокруг любой оси. Применение определенного интеграла не ограничивается только вычислением различных геометрических величин, но и широко используется в медицине.

Литература

1. Дифференциальное уравнение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://is.gd/BwmlUv>, свободный ресурс доступа.
2. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми, перевод А. Д. Мышкиса. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
3. Примеры решения дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://is.gd/TavpzS>, свободный ресурс доступа.

УДК 501

Семякин С. О.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ ГЕОДЕЗИСТА

Аннотация. Представлены области применения математики в геодезических работах.

Ключевые слова: геодезия, математика, расчеты.

Геодезия – одна из древнейших наук («geodesy» греч. в переводе на русский язык означает «землеразделение»). Геодезия – область отношений, возникающих в процессе научной, технической и производственной деятельности по определению фигуры, размеров и внешнего гравитационного поля Земли.

тационного поля Земли, координат и высот точек земной поверхности и их изменений во времени, проводимой в целях составления карт и планов, а также для обеспечения решения различных инженерных задач на земной поверхности. А с другой стороны – это отрасль прикладной математики, тесно связанная с геометрией, математическим анализом, классической теории потенциала, математической статистикой, и вычислительной математикой. Изначально в геодезии все берется из математики. Геодезия и геометрия долго взаимно дополняли и развивали друг друга. Историческую связь в первоначальных эпохах их развития между геодезией и геометрией показывает слово «геометрия», которое в переводе с греческого означает «землеизмерение». Поэтому геодезию иногда называют практической геометрией и землемерием.

Геодезические измерения обеспечивают соблюдения геометрических форм и элементов проекта сооружения как в отношении его расположения на местности, так и в отношении внешней и внутренней конфигурации. Даже после окончания строительства производятся специальные геодезические измерения, имеющие целью проверку устойчивости сооружения и выявления возможных деформаций во времени под действием различных сил и причин.

Основной метод измерений, который используется в геодезии, называется триангуляционным. Этот термин произошёл от латинского слова «триангулом», что означает «треугольник». В основе этого метода лежат знания о треугольнике. В геометрии рассматриваются две типичные геодезические задачи: определение высоты объекта и определение расстояния до недоступной точки.

Для практических целей часто возникает необходимость производить геометрические построения на местности. Такие построения нужны и при строительстве зданий, и при прокладке дорог, и при различных измерениях объектов на местности. Большую роль геодезия играет и в военном деле.

Рассмотрим несколько примеров задач, которые решаются в геодезии.

1. Определение высоты дерева.

Проще всего определить высоту дерева с помощью тени. Замерьте расстояние от конца тени дерева до его ствола. Запишите его, обозначив буквой S . Воткните в землю шест в месте, освещенном солнцем. Замерьте длину его тени. Если нет шеста, то можно использовать себя любимого вместо шеста. Вы наверняка знаете свой рост? Если нет, то вам нужно сначала измерить свой рост. Обозначьте высоту шеста (или свой рост) и длину его тени буквами h и s соответственно. Исходя из подобия треугольников, образованных деревом, шестом и их тенями,

$H/h = S/s$, где H – искомая высота дерева. Найдите высоту дерева по формуле $H = h*S/s$. Например, ваш рост составляет 1 м 70 см, а ваша тень составила 2 м 50 см, длина тени дерева составляет 11 м. Тень дерева 11 м умножаем на длину вашего роста, 1 м 70 см, получаем 18 м 70 см. Далее 18 м 70 см делим на длину вашей тени 2 м 50 см, получаем 7 м 48 см. Длина дерева составляет, 7 метров 48 сантиметров. (11м x 1м70 см / 2м50 см = 7м48см).

2. Определения расстояния до недоступной точки.

Положим, что точки A и B находятся на разных берегах реки и точка A недоступна (рис. 1). Продолжаем прямую AB провешиванием на произвольное расстояние BC . Затем провешиваем прямые BF и CE , пересекающиеся в точке D , и откладываем расстояния $DF=BD$ и $DE=CD$. Точки A и D определяют одну прямую, точки E и F – другую прямую. находим их пересечение в точке H . Тогда $AB=HF$ и может быть измерено непосредственно. Действительно, $\triangle BCD = \triangle DEF$, $\angle C = \angle E$, $\triangle ADC = \triangle DEN$, $AC=EN$, $AB=HF$.

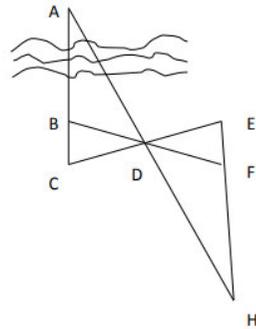


Рис. 1

3. Определение расстояния между двумя доступными точками, если расстояние между ними не может быть измерено непосредственно.

Положим, что точки A и B отделены на местности препятствием (здание, болото, лес и т. д.), не позволяющим промерить расстояние AB непосредственно, но каждая из точек доступна (рис. 2). В стороне от линии AB выбираем точку C так, чтобы из точки C были видны точки A и B и могли быть измерены расстояния AC и BC . При помощи провешивания продолжают прямые AC и BC на расстояния $CE=AC$ и $CD=BC$. Тогда в силу равенства треугольников неизвестное расстояние AB и DE может быть измерено непосредственно. Используя свойство средней линии треугольника, можно отложить $KC=1/2AC$; $CL=1/2BC$ и тогда $AB=2KL$. Также можно решить это с помощью способа подобия треугольников $CN=(1/n)*AC$ и $CM=(1/n)*BC$; тогда $AB=n*MN$.

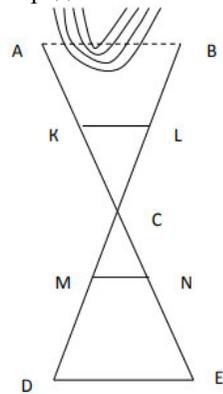


Рис. 2

На основе всего изложенного можно сделать следующий вывод: вся геодезия основана на математике.

Литература

1. <https://scienceforum.ru/2014/article/2014002383>.
2. Карабцова, З. М. Геодезия: учебное пособие / З. М. Карабцова. – Владивосток: ТИДОТ ДВГУ, 2002. – 151 с.

УДК 519.8

Степанова Е. О.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ САМОЛЕТОВ ПО АВИАКОМПАНИЯМ

Аннотация. В статье рассматривается решение задачи о распределении самолетов по авиакомпаниям.

Ключевые слова: динамическое программирование, оптимальный вариант, этапы, границы изменения, рекуррентное соотношение.

Актуальность данной темы состоит в том, что в современной экономике широко используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования.

Динамическое программирование – это метод нахождения оптимальных решений в задачах с многошаговой структурой. Данный метод применяется к решению некоторого класса задач путем их разложения на небольшие и менее сложные задачи. Задачи данного рода могут быть решены путем простого перебора всех возможных вариантов и выбора среди них наилучшего.

Рассмотрим задачу о распределении самолетов по небольшим авиакомпаниям.

Необходимо некоторое число самолетов распределить между пятью авиакомпаниями. Оценивают следующим образом: b_j – минимальное количество самолетов: $(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n) = (4, 6, 8, 5, 7)$. Другими словами, в 1-й авиакомпании должно быть не меньше 4 самолетов, во второй авиакомпании 6 самолетов или больше и т. д. Также могут появиться новые самолеты. Пусть y_j – количество самолетов на j -й авиакомпании. Должно выполняться условие $y_j \geq b_j$. Если количе-

ство самолетов $y_j > b_j$, то авиакомпания терпит убытки, которые вычисляются следующим образом:

$$C_{\lambda}(y_j - b_j) = 3(y_j - b_j), \quad j \in 1 : 5.$$

Расходы, связанные с появлением новых самолетов, вычисляются следующим образом:

$$C_{\mu}(y_j - y_{j-1}) = \begin{cases} 4 + 2(y_j - y_{j-1}), & y_j > y_{j-1}, \\ 0, & y_j < y_{j-1}. \end{cases}$$

Необходимо определить оптимальное количество самолетов в пяти авиакомпаниях, при условии, что в 6-й авиакомпании имеется 5 самолетов.

Рекуррентное соотношение записывается следующим образом:

$$f_5(y_4) = \min_{y_5=b_5} \{C_{\lambda}(y_5 - b_5) + C_{\mu}(y_5 - y_4)\},$$

$$f_j(y_{j-1}) = \min_{\substack{y_j \geq b_j \\ j=4,3,2,1}} \{C_{\lambda}(y_j - b_j) + C_{\mu}(y_j - y_{j-1}) + f_{j+1}(y_j)\}$$

Определим границы изменения переменных y_1, \dots, y_5 . Для получения оптимального решения рассмотрим значения $y_1 \in (4;8)$, $y_2 \in (6;8)$, $y_3 = 8$, $y_4 \in (5;7)$, $y_5 = 7$. Больше 8 самолетов не потребуются, поэтому $y_j \leq 8$. В 5-й авиакомпании должно быть ровно 7 самолетов, поэтому и в 4-й авиакомпании не должно быть более семи самолетов.

Решим задачу с помощью таблиц и рекуррентного уравнения Беллмана.

Этап 5. Авиакомпания №5

y_4	$b_5 = 7$		Оптимальное решение	
	$C_{\lambda}(y_5 - 7) + C_{\mu}(y_5 - y_4)$			
	$y_5 = 7$		$f_5(y_4)$	y_5^*
5	0+8=8		8	7
6	0+6=6		6	7
<u>7</u>	0+0=0		<u>0</u>	<u>7</u>

Этап 4. Авиакомпания №4 и №5

y_3	$b_4 = 5$			Оптимальное решение	
	$C_{\lambda}(y_4 - 5) + C_{\mu}(y_4 - y_3) + f_5(y_4)$				
	$y_4 = 5$	$y_4 = 6$	$y_4 = 7$	$f_4(y_3)$	y_4^*
<u>8</u>	0+0+8=8	3+0+6=9	6+0+0=6	<u>6</u>	<u>7</u>

Этап 3. Авиакомпания №3, №4 и №5

y_2	$b_3 = 8$	Оптимальное решение	
	$C_L(y_3 - 8) + C_H(y_3 - y_2) + f_4(y_3)$		
	$y_3 = 8$	$f_3(y_2)$	y_3^*
6	$0+8+6=14$	14	8
7	$0+6+6=12$	12	8
<u>8</u>	$0+0+6=6$	<u>6</u>	<u>8</u>

Этап 2. авиакомпании №2, №3, №4, №5 и этап 1. авиакомпании №1, №2, №3, №4 и №5 вычисляются аналогично предыдущим таблицам.

Оптимальное распределение самолетов на авиакомпаниях

Ав. №6 «Кога-лымавиа»	Ав. №1 «Сибирская легкая авиация»	Ав. №2 «Грозный Авиа»	Ав. №3 «Восток»	Ав. №4 «Ай Флай»	Ав. №5 «Икар»
$b_0 = 5$	$b_1 = 4$	$b_2 = 6$	$b_3 = 8$	$b_4 = 5$	$b_5 = 7$
$y_0 = 5$	$y_1 \in (4;8)$	$y_2 \in (6;8)$	$y_3 = 8$	$y_4 \in (5;7)$	$y_5 = 7$
–	$y_1^* = 4$	$y_2^* = 8$	$y_3^* = 8$	$y_4^* = 7$	$y_5^* = 7$

Оптимальное распределение имеет вид:

$$y^* = (4, 8, 8, 7, 7) ; f_1(5) = 22 .$$

Итак, процесс управления можно разделить на части и представить его в виде динамической последовательности и интерпретировать в виде пошаговой программы, развернутой во времени. Это позволяет создать план программы дальнейших действий. Так как вариантов возможных планов–программ много, то нужно выбрать наиболее лучший из них, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью.

Литература

1. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование: учебник. – 3-е изд., стер. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 286 с.
2. Визгунов, Н. П. Динамическое программирование в экономических задачах с применением системы SciLab / Н. П. Визгунов. – Н. Новгород: ННГУ, 2011. – 70 с.

Степанова И. Ю.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ БИЛА

Аннотация. В статье рассматривается задача нелинейного программирования, решаемая методом Била. Представлен алгоритм, используемый для решения приведенной задачи.

Ключевые слова: задача квадратичного программирования, целевая функция, оптимальное решение, базисные переменные.

Метод Била представляет собой обобщение симплекс-метода. При решении задач методом Била исходным является какое-либо базисное допустимое решение системы ограничений. Пусть дана задача квадра-

$$\text{тичного программирования: } \min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jk} x_j x_k$$

$$\text{при условиях } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что квадратичная форма является положительно определенной, т. е. имеем задачу выпуклого программирования.

Рассмотрим решение следующей задачи квадратичного программирования, используя метод Била:

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 2x_1x_2$$

$$\text{при ограничениях } x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Чтобы перейти в ограничения к равенствам, введем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4 в систему ограничений, которые будут являться базисными. Выразим базисные переменные через свободные переменные x_1, x_2 : $x_3 = 10 - x_1 - 2x_2$, $x_4 = 6 - x_1 - x_2$.

Положив свободные переменные равными нулю, найдем первое решение: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 6$, $X_1 = (0; 0; 10; 6)$, $f(X_1) = 0$. Найденное решение проверим на оптимальность. Для этого вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и

вычислим их значения в полученной точке: $\partial f(x)/\partial x_1 = 2x_1 - 10 - 2x_2$; $\partial f(X_1)/\partial x_1 = -10 < 0$; $\partial f(x)/\partial x_2 = -2x_1 + 4x_2$; $\partial f(X_1)/\partial x_2 = 0$.

Так как $\partial f(X_1)/\partial x_1 < 0$, то за счет увеличения значения переменной x_1 значение функции $f(x)$ можно улучшить. Определим предел возрастания переменной x_1 . Для этого найдем, при каких значениях переменной x_1 базисные переменные и частная производная станут нулевыми. Имеем $x_3 = 0$ при $x_1 = 10$, $x_4 = 0$ при $x_1 = 6$, $\partial f(x)/\partial x_1 = 0$ при $x_1 = 5$. При увеличении значения переменной x_1 , а именно, при $x_1 = 5$ в нуль обращается частная производная. А это значит, что необходимо ввести дополнительную неограниченную по знаку переменную $u_1 = -\partial f(x)/\partial x_1 = -(2x_1 - 10 - 2x_2)$.

Выразим из этого равенства переменную x_1 , подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию, получим:

$$x_1 = 5 - 1/2u_1 + x_2, \quad x_3 = 5 + 1/2u_1 - 3x_2, \quad x_4 = 1 + 1/2u_1 - 2x_2.$$

$$f(x) = -25 + 1/4u_1^2 - 10x_2 + x_2^2.$$

Второе решение: $u_1 = x_2 = 0$, $x_1 = 5$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$, $X_2 = (5; 0; 5; 1)$, $f(X_2) = -25$. Найденное решение проверим на оптимальность. Вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в точке X_2 : $\partial f(X_2)/\partial u_1 = 0$, $\partial f(X_2)/\partial x_2 = -10 < 0$. Отсюда следует, что можно улучшить значение функции за счет увеличения значения переменной x_2 . Аналогично базисные переменные и частную производную приравняем к 0. Получаем: $x_3 = 0$ при $x_2 = 5/3$, $x_4 = 0$ при $x_2 = 1/2$, $\partial f(x)/\partial x_2 = 0$ при $x_2 = 5$. При увеличении значения переменной x_2 , а именно, при $x_2 = 1/2$, в нуль обращается переменная x_4 . Отсюда следует, что переменную x_4 необходимо исключить из базиса. Поэтому из

выражения для переменной x_4 найдем переменную x_2 и подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию:

$$x_1 = 11/2 - 1/4u_1 - 1/2x_4, \quad x_2 = 1/2 + 1/4u_1 - 1/2x_4,$$

$$x_3 = 7/2 - 1/4u_1 + 3/2x_4,$$

$$f(x) = -119/4 + 5/16u_1^2 - 9/4u_1 + 9/4x_4 - 1/4x_4u_1 + 1/4x_4^2.$$

Третье решение: $u_1 = x_4 = 0$, $x_1 = 11/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 7/2$,
 $X_3 = (11/2; 1/2; 7/2; 0)$, $f(X_3) = -119/4$.

Найденное решение проверим на оптимальность. Вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в точке X_3 : $\partial f(X_3)/\partial u_1 = -9/4 < 0$,
 $\partial f(X_3)/\partial x_4 = 9/2 > 0$.

Отсюда следует, что можно улучшить значение функции за счет увеличения значения переменной u_1 . Аналогично базисные переменные и частную производную приравняем к 0. Получаем: $x_1 = 0$ при $u_1 = 22$, x_2 увеличивается с ростом u_1 , $x_3 = 0$ при $u_1 = 14$, $\partial f/\partial u_1 = 0$ при $u_1 = 18/5$. При увеличении значения переменной u_1 , а именно, при $u_1 = 18/5$ в нуль обращается частная производная.

А это значит, что необходимо ввести дополнительную неограниченную по знаку переменную $u_2 = -\partial f(x)/\partial u_1 = 9/4 - 5/8u_1 + 1/4x_4$. Определим из этого равенства переменную u_1 . Подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию, получим:
 $u_1 = 18/5 - 8/5u_2 + 2/5x_4$, $x_1 = 23/5 + 2/5u_2 - 3/5x_4$,
 $x_2 = 7/5 - 2/5u_2 - 2/5x_4$, $x_3 = 13/5 + 2/5u_2 + 7/5x_4$,
 $f(x) = -169/5 + 4/5u_2^2 + 18/5x_4 + 1/5x_4^2$.

Четвертое решение: $u_2 = x_4 = 0$, $u_1 = 18/5$, $x_1 = 23/5$,
 $x_2 = 7/5$, $x_3 = 13/5$, $X_4 = (23/5; 7/5; 13/5; 0)$, $f_4 = -169/5$.

Найденное решение проверим на оптимальность. Вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в точке X_4 : $\partial f(x)/\partial u_2 = 0$,
 $\partial f(x)/\partial x_4 = 18/5 > 0$. Так как частные производные неотрицательны, то найденное решение является оптимальным.

Литература

1. Кюнцци, Г. П. Нелинейное программирование / Г. П. Кюнцци, В. Крелле. – М.: Советское радио, 1965. – 304 с.

Степанова И. Ю.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДАМИ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ И ЭРРОУ-ГУРВИЦА

Аннотация. В статье рассматриваются методы решения задачи нелинейного программирования. Разобрана задача нахождения максимального значения функции методами штрафных функций и Эрроу-Гурвица.

Ключевые слова: нелинейное программирование, метод Эрроу-Гурвица, метод штрафных функций.

Основным инструментом для решения задачи, содержащей некоторые ограничения, являются градиентные методы. Благодаря блочным алгоритмам они получили большую популярность. На практике встречаются следующие два случая. Первый тип задач – задачи с вогнутой нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями. Задачи квадратичного программирования служат примером данного типа задач. Второй тип задач – общие задачи выпуклого программирования.

Методы линеаризации целевой функции направлены на решение задач первого класса, а такие методы, как метод штрафных функций и метод Эрроу-Гурвица используются для решения задач второго типа.

Рассмотрим следующую задачу. Используя метод штрафных функций и метод Эрроу-Гурвица, требуется найти максимальное значение функции

$$F = -x_1^2 - x_2^2 \quad (1)$$

при ограничениях

$$12 - (x_1 - 6)^2 - (x_2 - 6)^2 \geq 0; x_1, x_2 \geq 0. \quad (2)$$

Данная функция является отрицательно определенной квадратичной, поэтому можно сделать вывод, что функция является вогнутой. В то же время выпуклой является область допустимых решений задачи, определяемая ограничениями (2). Таким образом, рассматриваемая задача – задача выпуклого программирования.

Для решения данной задачи воспользуемся методами штрафных функций и Эрроу-Гурвица. Следует построить область допустимых решений (рис. 1), а также необходимо отразить линии уровня, определяе-

мые целевой функцией (1). Окружности с центром в точке $(0; 0)$ являются этими линиями. Предполагается, что искомой точкой максимального значения целевой функции является точка касания одной из этих окружностей с областью допустимых решений.

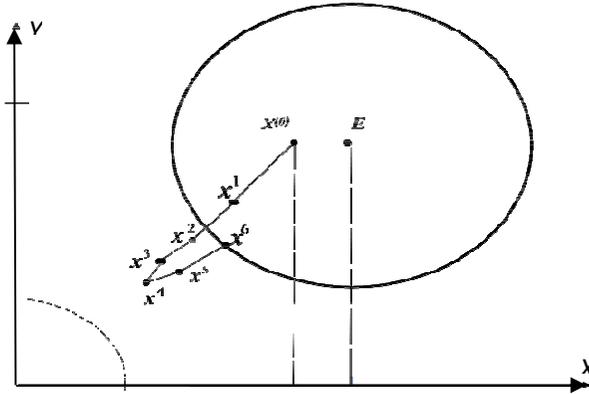


Рис. 1. График области допустимых решений

Допустим, что $X^{(0)} = (6; 7)$ — начальная точка. Возьмем $\lambda = 0,1$ и обозначим $g(x_1, x_2) = 12 - (x_1 - 6)^2 - (x_2 - 6)^2$, затем определим частные производные функций $F(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ по переменным x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= -2x_1; & \frac{\partial g}{\partial x_1} &= -2x_1 + 12; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -2x_2; & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= -2x_2 + 12. \end{aligned}$$

Далее с помощью формулы

$$x_i^{(k+1)} = \max \left\{ 0; x_j^k + \lambda \left[\frac{\partial F(x^{(k)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial g_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right] \right\}$$

находим последовательность точек, одна из которых и будет являться приемлемым решением данной задачи.

При первой итерации возьмем точку $X^{(0)} = (6; 7)$, принадлежащую области допустимых решений. Тогда воспользовавшись формулой выше, второе слагаемое в квадратных скобках примет значение 0. Значит, координаты следующей точки $X^{(1)}$ вычисляем по формулам:

$$x_1^{(1)} = \max \left\{ 0; x_1^0 + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} \right\} = \max \{0; 5 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 5\} = 4;$$

$$x_2^{(1)} = \max \left\{ 0; x_2^0 + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} \right\} = \max \{0; 6 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 6\} = 4,8.$$

Далее следует проверка принадлежности данной точки области допустимых решений. Проверим условие неотрицательности функции-ограничения в полученной точке. Вычислим значение $g(X^{(1)}) = 12 - 4 - 1,44 = 6,56$. Имеем, $g(X^{(1)}) > 0$, значит, $X^{(1)}$ принадлежит области допустимых решений. В этой точке функция примет следующее значение $F(X^{(1)}) = -39,04$. Проведем вторую итерацию, которая показывает: $x_1^{(2)} = \max \{0; 4 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4\} = 3,2$;

$$x_2^{(2)} = \max \{0; 4,8 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,8\} = 3,84;$$

$$g(X^{(2)}) = 12 - 7,84 - 4,666 = -0,51 < 0.$$

Третья, четвертая, пятая итерации, точки не попадают в область допустимых решений. Однако при шестой итерации получим следующий результат:

$$x_1^{(6)} = \max \{0; 3,080 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,080 + 1,856 \cdot ((-2) \cdot 3,080 + 12)]\} = 3,548;$$

$$x_2^{(6)} = \max \{0; 3,236 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,236 + 1,856 \cdot ((-2) \cdot 3,236 + 12)]\} = 3,615;$$

$$g(X^{(6)}) = 0,299 > 0; F(X^{(6)}) = -25,657.$$

Точка принадлежит области допустимых решений и находится достаточно близко к ее границе, значит, решение $x_1^* = 3,548$; $x_2^* = 3,615$ можно считать приемлемым оптимальным решением задачи, $F(X^{(6)}) = -25,657$.

На основании приведенного решения, можно сделать вывод о том, что данные методы поиска приближенных решений позволяют успешно решать экономические задачи, так как отклонения от результата являются незначительными.

Литература

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие. – 2-е изд., испр. / И. Л. Акулич. – СПб.: Лань, 2009. – 352 с.
2. Бодров, В. И. Математические методы принятия решений: учеб. пособие / В. И. Бодров, Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартеньянов. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. – 124 с.

Таныгина В. В.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
 Поволжский государственный технологический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ФРАНКА-ВУЛФА

Аннотация. В данной статье рассматривается задача нелинейного программирования на примере вогнутой функции. Представлена теоретическая основа для решения задачи, а также методом Франка-Вулфа разобрана задача выпуклого программирования.

Ключевые слова: метод Франка-Вулфа, вогнутая функция, максимум, оптимальное решение.

Используя градиентные методы, можно найти решение любой задачи нелинейного программирования. Но наиболее целесообразно применять их для нахождения решения задач выпуклого программирования.

Пусть требуется найти максимальное значение вогнутой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i (i = \overline{1, m})$, $x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$. Процесс поиска решения задачи начинают с определения точки $X^{(k)}$, принадлежащей области допустимых решений задачи. Вычисляют градиент функции в этой точке

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} \right]$$

и строят линейную функцию

$$F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n.$$

Определяют максимальное значение этой функции при заданных ограничениях. Пусть решение данной задачи определяется точкой $Z^{(k)}$. Тогда новое допустимое решение исходной задачи – точка $X^{(k+1)}$: $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k(Z^{(k)} - X^{(k)})$, где λ_k – шаг вычислений ($0 \leq \lambda_k \leq 1$). Итерационный процесс выполняется до тех пор, пока градиент функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в новой точке $X^{(k+1)}$ не станет равным 0 или же пока не выполнится условие $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, ε – достаточно малое положительное число, характеризующее точность полученного решения.

Рассмотрим данную задачу на конкретном примере. Найти максимальное значение функции: $f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3$;

при условиях: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$; $x_2 \leq 12$; $x_1 + 2x_3 \leq 14$;

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Найдем градиент функции

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] = (-2x_1; -2x_2 + 2; -4x_3 + 3).$$

Начальное допустимое решение $X^{(0)} = (0; 0; 0)$. Критерий оценки качества получаемого решения – неравенство $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,01$.

1 итерация. Вычислим градиент функции в точке: $\nabla f(X^{(0)}) = (0; 2; 3)$. Определим максимум функции $F_1 = 2x_2 + 3x_3$ при заданных условиях. Для этого используем симплекс-метод. Построим симплекс-таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{io}	CO
1	1	1	1	0	0	18	18
0	1	0	0	1	0	12	-
1	0	2	0	0	1	14	7
0	-2	-3	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{io}	CO
1/2	1	0	1	0	-1/2	11	11
0	1	0	0	1	0	12	12
1/2	0	1	0	0	1/2	7	-
3/2	-2	0	0	0	3/2	21	-21/2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{io}	CO
1/2	1	0	1	0	-1/2	11	
-1/2	0	0	-1	1	1/2	1	
1/2	0	1	0	0	1/2	7	
5/2	0	0	0	0	1/2	43	

Задача имеет оптимальный план в точке $Z^{(0)} = (0; 11; 7)$. Вычислим новое допустимое решение по формуле: $X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1(Z^{(0)} - X^{(0)})$. Подставив значения, получим: $x_1^{(1)} = 0$; $x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1(11 - 0) = 11\lambda_1$; $x_3^{(1)} = 0 + \lambda_1(7 - 0) = 7\lambda_1$. Определим число λ_1 . Подставим в исходную

функцию $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}: f(\lambda_1) = -219\lambda_1^2 + 43\lambda_1; f'(\lambda_1) = -438\lambda_1 + 43;$
 $\lambda_1 \approx 0,09817; X^{(1)} = (0; 1,0799; 0,6872); f(X^{(1)}) = 2,110728.$

$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(0)})| = 2,110728 - 0 = 2,110728 > \varepsilon.$$

II итерация. $\nabla f(X^{(1)}) = \left(0; -\frac{35}{219}; \frac{55}{219}\right)$. Найдем максимум функции
 $F_2 = (-35x_2 + 55x_3) / 219$ при тех же заданных условиях. Построим симплекс-таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{io}	CO
1	1	1	1	0	0	18	18
0	1	0	0	1	0	12	-
1	0	2	0	0	1	14	7
0	$\frac{35}{219}$	$-\frac{55}{219}$	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{io}	CO
1/2	1	0	1	0	-1/2	11	
0	1	0	0	1	0	12	
1/2	0	1	0	0	1/2	7	
$\frac{55}{438}$	$\frac{35}{219}$	0	0	0	$\frac{55}{438}$	$\frac{385}{219}$	

Оптимальный план достигается в точке $Z^{(1)} = (0; 0; 7)$. Новое допустимое решение:
 $X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_2(Z^{(1)} - X^{(1)}): x_1^{(2)} = 0;$
 $x_2^{(2)} = 1,0799 - 1,0799\lambda_2; x_3^{(2)} = 0,6872 + 6,31279\lambda_2.$ Найдем λ_2 , подставляя в исходную функцию:

$$f(\lambda_2) = -80,8687\lambda_2^2 + 1,75799\lambda_2 + 2,11;$$

$$f'(\lambda_2) = -161,7374\lambda_2 + 1,75799; \lambda_2 \approx 0,01087;$$

$$X^{(2)} = (0; 1,06817; 0,75583); f(X^{(2)}) = 2,12028.$$

$$|f(X^{(2)}) - f(X^{(1)})| = 2,12028 - 2,110728 = 0,009552 < \varepsilon = 0,01.$$

Таким образом, $X^{(2)} = (0; 1,06817; 0,75583)$ является допустимым приближением решения задачи. Из представленного примера видно, что с помощью метода Франка-Вулфа можно решать задачи нахождение экстремума нелинейной функции с линейными ограничениями.

Литература

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 352 с.

УДК 51-7

Терентьев Г. В.

Научный руководитель: Володина Е. В., канд. пед. наук, доцент
Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОММУТАЦИЯХ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

***Аннотация.** В работе рассмотрены характеристики сигнала, возникающего при коммутациях в электрической сети. В работе сформулированы общие требования к пусковым измерительным органам волновой РЗА.*

***Ключевые слова:** преобразование Фурье, спектральный анализ, электрический переходный процесс, волновая РЗА.*

Коммутация в электрической системе приводит к изменению принужденной составляющей режима и возникновению свободных составляющих. Для распознавания повреждений в электрической сети релейная защита (РЗА) обычно использует принужденную составляющую основной гармоники. В волновой РЗА факт повреждения может быть установлен раньше, чем может быть выделена основная гармоника, а расчет выполняется по свободным составляющим электромагнитного переходного процесса [1]. В настоящей работе ставится задача определения частотных характеристик начального переходного процесса при коммутациях. Распространяясь из места коммутации, электромагнитная волна претерпевает множественные отражения и преломления в электрической сети. Вся совокупность преобразований сигнала образует образы, которые должны быть распознаны устройствами РЗА. На основе частотно-временного анализа исследуется набор спектральных составляющих начальной стадии переходного процесса, пригодной для работы волновых алгоритмов методом анализа спектра дискретного сигнала f_n с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [2]:

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad (k=0,1,\dots,N-1). \quad (1)$$

Нами исследуется переходный процесс при коротком замыкании (КЗ) на высоковольтной линии (ВЛ) 330 кВ, смоделированный в среде PSCAD и зарегистрированный с частотой 2 МГц (рис. 1).

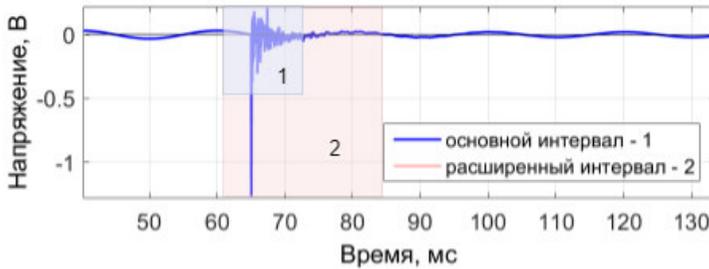


Рис. 1. Сигнал переходного процесса в линии электропередачи

На рис. 2 представлен спектр выделенного начального фрагмента КЗ, где видно, что в сигнале явно выражены низкочастотные составляющие (до 11 кГц), амплитуды высокочастотных составляющих пренебрежимо малы. Контрольный анализ спектра на расширенном интервале показывает адекватность основного измерения.

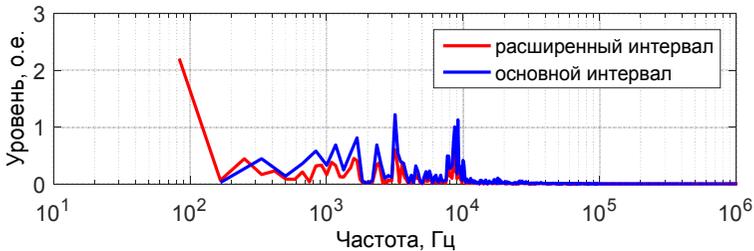


Рис. 2. Спектр сигнала на заданных интервалах

Вследствие отражений в каждом узле сети наблюдается череда волн. Если окно ДПФ охватывает несколько волн, то можно условно разделить это окно на интервалы, $[0, N_1-1]$, $[N_1, N_2-1]$, ..., $[N_p, N-1]$, содержащие отдельные волны. Тогда формула (1) примет вид

$$F_k = \sum_{n=0}^{N_1-1} f_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N_1}^{N_2-1} f_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \dots + \sum_{n=N_p}^{N-1} f_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}. \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что ДПФ суммирует составляющие отдельных волн. Эти составляющие имеют произвольную фазу, зависящую от времени прихода волн и их полярности. Взаимное расположение фаз влияет на общую сумму, которая может отображать заниженные значения при неадекватной длине интервалов. Дальнейший анализ сигнала выполнен с использованием спектрограмм, показывающих величину частотных составляющих для каждого момента времени. Оптимизацией параметров ширины окна преобразования Фурье M_f и глубины наложения N_n были получены узкие по частоте полосы на спектрограмме. На рис. 3 представлены наиболее значимые области спектрограмм для трех сигналов, относящихся к различным условиям КЗ на одной линии электропередачи. Видно, что в предшествующем коммутации режиме преобладают низкие частоты (основная гармоника), тогда как после коммутации наиболее значимые частоты сосредоточены в области 1-3 кГц. Длительность этого переходного процесса ограничена 1-3 мс.

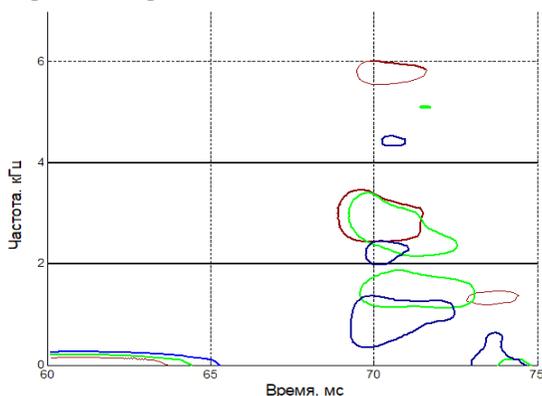


Рис. 3. Спектрограмма сигналов 1, 2, 3

Таким образом, на основе имитационной модели исследован спектр сигнала, показана его связь с конфигурацией сети; сформулированы общие требования к пусковым измерительным органам волновой РЗА, предназначенным для выявления факта коммутации в электрической сети.

Литература

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. для вузов / А. Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

2. Бондарев, В. Н. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: учеб. для вузов / В. Н. Бондарев, Г. Трестер, В. С. Чернега. – Харьков: Конус, 2001. – 608 с.

УДК 501

Тихонова А. А.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ ДЛЯ МАЛОЗАГЛУБЛЕННЫХ ФУНДАМЕНТОВ

Аннотация. Представлены расчетные формулы для определения степени пучинистости грунта с последующим заложением фундамента.

Ключевые слова: мультимедиа, пучинистость, грунты, фундаменты, промерзший слой почвы, нагрузка, основание, объем почвы.

Фундамент – это основа возводимого дома, на которой будет лежать вся нагрузка. Именно качество заложеного фундамента определяет срок службы постройки.

Тип фундамента избирается, исходя из рельефа местности, почвы, на котором предполагается строительство. Важно учитывать, что под весом здания грунт может проседать, на это нельзя не обращать внимания.

Главная причина, вызывающая просадку здания, – это силы вспучивания грунта вследствие морозов. Разберем их подробнее.

Морозное пучение – расширение объема почвы, – вызвано замерзанием влаги, которая присутствует в грунтах и при значениях температуры ниже 0°C превращается в лед. Из-за этого возможно выдавливание грунта вверх, а также фундамента сооружения. Разберем один из вариантов расчета распределения нормальных сил морозного пучения для малозаглубленных фундаментов, а именно тот, где присутствуют тройные интегралы. Имеются две стадии напряжения нормальных сил морозного пучения и морозного напряжения в грунте, сосредоточенные под фундаментом.

Первая стадия – возрастание нормальных сил морозного пучения, функционирующих внизу при условии неподвижности фундамента.

Такое увеличение сил продолжается до того момента, пока замерзший слой почвы не разрушится.

На втором этапе происходит смещение фундамента вверх, взаимно с разрушенным слоем грунта. Данные условия возможно записать в следующем виде:

$$V_{ps}^I < V_{\sigma}^I = N. \quad (1)$$

Это уравнение справедливо при выполнении следующих условий:

$$T=0. \quad (2)$$

$$\sigma > p_{\max}. \quad (3)$$

Или выполняются другие условия:

$$T=0. \quad (4)$$

$$p_{\max} > \sigma = p_s. \quad (5)$$

То:

$$V_{\sigma}^{II} = V_{ps}^{II} = N. \quad (6)$$

С учётом уравнений (1) – (6) и доказанных учеными фактов, определяющих связь сил морозного пучения с разными свойствами почвы, условия баланса для фундамента можно выразить в следующем виде:

$$N = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_0^z \sigma(x, y, z) dx dy dz = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_0^z p_s(x, y, z) dx dy dz, \quad (7)$$

где V_{σ}^I, V_{ps}^I – объёмы эпюр напряжений в грунте для 1-ого и 2-ого этапа напряжённого состояния то же;

V_{ps}^I, V_{ps}^{II} – объёмы эпюр нормальных сил пучения под твердомёрзлым слоем грунта на данной глубине h от подошвы фундамента здания для 1-ой и 2-ой стадий напряжённого состояния в соответствии с этим;

N – давление на основание фундамента, создаваемая сооружением;

T – величина, обозначающая морозное пучение на месте;

p_{\max} – максимально допустимая нагрузка сил морозного пучения твердомёрзлого слоя грунта при неизменяющемся объёме почвы. Данные находятся путем проведения экспериментов.

$p_{s,\sigma}$ – средние показатели напряжений в грунте под слоем замерзшего грунта и нагрузки морозного пучения.

Используя функцию Лапласа, можно найти значения напряжений в грунте. В случае пространственной задачи приобретем:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-k \frac{R^2}{2}}, \quad (8)$$

где σ_0 – напряжение в центральной точке фундамента;

k – коэффициент функции Лапласа.

Решая интегральное уравнение равновесия (7), можно получить предельные данные нормальных сил морозного пучения для различных форм фундамента. Так, давление морозного пучения на краю фундамента круглой формы можно определить по данному уравнению:

$$P = \frac{4\sigma'_0}{k \cdot R^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{2}R^2} \right) + \sigma_c. \quad (9)$$

Для фундамента квадратной формы:

$$P = \frac{16\sigma'_0}{k \cdot b^2} \Phi^2 \frac{b}{2} + \sigma_c. \quad (10)$$

Для прямоугольного фундамента:

$$P = \frac{16\pi\sigma'_0}{k \cdot l \cdot b} \Phi \frac{b}{2} \sqrt{k\Phi} \frac{l}{2} \sqrt{k} + \sigma_c, \quad (11)$$

где σ_c – нагрузка по кромке круглого фундамента, а также на вершинах квадратного и прямоугольного фундаментов;

l – длина твердомерзлого слоя грунта;

b – ширина твердомерзлого слоя грунта;

R – радиус твердомерзлого слоя грунта под подошвой круглого фундамента.

В величинах $\sigma'_0, \sigma_0, \sigma_c$ присутствует следующая зависимость:

Максимальное напряжение в центральной точке фундамента равно разности напряжения в центральной точке фундамента и нагрузке по кромке круглого фундамента, а также вершинах квадратного и прямоугольного фундаментов (12).

Уравнения (9) – (11) правильны при выполнении неравенства:

$$p_s + \sigma \geq \sigma_0. \quad (12)$$

При соблюдении следующего условия:

$$p_s + \sigma < \sigma_0.$$

Данные, характеризующие нагрузку морозного пучения, твердомерзлого слоя грунта будут находиться способом постепенного приближения из равенства объёмов эпюр напряжений в грунте для 2-ого этапа напряжённого состояния V_{σ}^{II} и объёмов эпюр нормальных сил пучения под твердомерзлым слоем грунта на глубине h от подошвы фундамента здания для 2-ой стадии напряжённого состояния.

Вышеуказанная зависимость разделения нормальных сил морозного пучения на основе твердомёрзлого слоя почвы под фундаментом здания помогает с математической точки зрения объяснить процесс влияния пучинистого грунта на фундамент здания.

Литература

1. Абжалимов, Р. Ш. К расчету малоэтажных зданий на мелкозаглубленных фундаментах в пучинистых грунтах / Р. Ш. Абжалимов // Транспортное строительство. – 2001. – №3. – С. 13-16.
2. Берлинов, М. В. Основания и фундаменты / М. В. Берлинов. – СПб: Лань, 2011. – 320 с.
3. Болдырев, Г. Г. Основания и фундаменты (в вопросах и ответах) / Г. Г. Болдырев, М. В. Малышев. – М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2004. – 328 с.
4. ГОСТ 28622-90. Грунты. Метод лабораторного определения степени пучинистости.

УДК 501

Толстова А. Г.

Научный руководитель: Журавлева И. В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МАТЕМАТИКА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Аннотация. *Представлен расчет стоимости строительства автомобильных дорог по простым математическим формулам.*

Ключевые слова: *дорога, расчет, стоимость, математика.*

Автомобильные дороги – это сооружения, при строительстве которых необходимо не только большое количество разных материалов, но и человеческого капитала. Именно при проектировании дорог одним из главных целей является достижение их высоких транспортно-эксплуатационных качеств при минимальных затратах строительных материалов и человеческого капитала. Правильно запроектированная дорога обеспечивает безопасность движения как одиночных автомобилей, так и транспортных потоков в самые напряженные периоды работы дорог.

Проектные решения автомобильных дорог должны обеспечивать организованное, безопасное, удобное и комфортабельное движение автотранспортных средств с расчетными скоростями.

Не зря же говорят, что математика – царица всех наук. Одним из основных дисциплин, необходимых при проектировании любого сооружения, является математика. И автомобильные дороги не являются исключением.

Строительные задачи могут отличаться по степени сложности расчетов. Такие расчеты выполняются с учетом множества факторов и стоят на стыке двух наук – математики и сопротивления материалов. Однако помимо таких сверхсложных задач существуют и более простые, с точки зрения математики, вопросы, которые чаще встречаются в деятельности строителя-практика.

Часто в средствах массовой информации можно прочесть или услышать такие фразы: «Закончено строительство участка автодороги «А» протяженностью n километров. Общая стоимость участка составила N рублей. Средняя цена одного километра N/n ».

Но откуда же берутся эти цифры?

Проект каждой автотрассы уникален, разница может быть значительной даже в том случае, если 2 магистрали расположены в одной стране или городе. Во многих случаях эти цифры могут сильно колебаться. Все зависит от многих факторов: природно-климатические условия, рельефа, типовых конструкций основания дороги, расчетной нагрузки, расчетной скорости движения транспорта, себестоимости дорожно-строительных материалов, расходов на их транспортировку и ещё ряда других.

Для объективности расчета стоимости автомагистрали дорожные строители всего мира используют 2 типа расчетов для точного определения стоимости трассы:

- цена 1 км автодороги в 1-полосном исчислении (lanemiles), включает расходы на эстакады и развязки;
- цена 1 км 4-полосной дороги с разделительной полосой, если предстоит масштабное строительство дорог с однородным рельефом и с высокой плотностью застройки на территории.

Все эти факторы сводятся к каким-то определенным цифрам, которые учитываются при полном проектировании и расчете стоимости дорог.

Также стоимость зависит еще и от класса дорог и их категории. Очевидно, что чем выше класс дорог, тем дороже ее стоимость.

Исходя из опубликованных Минтрансом данных, 1 километр дороги асфальта стоит:

- I категория – 52 286 720 руб.
- II категория – 42 536 150 руб.
- III категория – 37 109 230 руб.
- IV категория – 14 096 450 руб.
- V категория – 11 732 750 руб.

Неправильные расчеты могут привести к плачевным результатам: может не хватить материалов, необходимых для строительства. А это – к тому, что могут быть не достроены некоторые участки автодороги. Также возможен такой исход: строительство не может быть закончено в установленные сроки.

Таким образом, математика играет существенную роль при проектировании и строительстве автомобильных дорог.

Литература

1. <https://nerud-teh.ru/skolko-stoit-kilometr-dorogi/>.
2. <https://vuzlit.ru/1228053/vvedenie>.
3. <https://otherreferats.allbest.ru/construction/0016048>.

УДК 519.62

Трошин А. В., Трошин Н. В., Кулагина С. В.
Поволжский государственный технологический университет

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Работа посвящена методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, метод Эйлера, методы Рунге-Кутты.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) – это дифференциальное уравнение для функции от одной переменной.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение вместе с начальным условием называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

Наиболее распространенные методы решения ОДУ – это методы Эйлера и Методы Рунге-Кутты.

Метод Эйлера – простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление».

Описание метода.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y); & (1) \\ \Delta y &= y_1 - y_0; \\ \Delta x &= x_1 - x_0 = h. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0); \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0); \quad x_1 = x_0 + h;$$

Следовательно,

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i); \quad (2)$$

$$x_{i+1} = x_i + h. \quad (1.a)$$

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка (1). Решение ищется на некотором интервале интервале $(x_0, b]$. На этом интервале введем узлы:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

где каждый x_i вычисляется за счет добавление значения шага h (1.a).

Приближенное решение определяется по формуле (2).

Модифицированный метод Эйлера с пересчетом

Повысить точность и устойчивость вычисления решения можно с помощью неявного метода Эйлера следующего вида.

Прогноз

$$\tilde{y}_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Коррекция

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \tilde{y}_i)}{2}.$$

Для повышения точности корректирующую итерацию можно повторить, подставляя $\tilde{y}_i, \tilde{y}_i = y_i$.

Модифицированный метод Эйлера с пересчетом имеет второй порядок точности, однако для его реализации необходимо как минимум дважды вычислять $f(x, y)$. Метод Эйлера с пересчетом представляет собой разновидность методов Рунге-Кутты (предиктор-корректор).

Двухшаговый метод Адамса-Башфорта

Другой способ повысить точность метода заключается в использовании не одного, а нескольких вычисленных ранее значений функции.

Методы Рунге-Кутты (в литературе встречаются названия: **методы Рунге-Кутта** или же **методы Рунге-Кутты**) – большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

Классический метод Рунге-Кутты четвёртого порядка.

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге-Кутты.

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0; \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4); \quad (4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad (5)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right); \quad (6)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right); \quad (7)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3); \quad (8)$$

h – величина шага сетки по x .

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (3).

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле (4).

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии (5-8);

h – величина шага сетки по x . Этот метод имеет четвёртый порядок точности.

Также существует обобщённая формула явных и неявных методов Рунге-Кутты.

Однако о неявном методе Рунге-Кутты 2-го порядка упомянем, т. к. он является модифицированным методом Эйлера «с пересчётом», о котором мы уже упомянули ранее.

Задача Коши – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удо-

влетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие).

Для численного решения задачи Коши для ОДУ используются вышперечисленные методы.

Литература

- 1 https://www.matburo.ru/Examples/Files/Cm_du_1.pdf.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Эйлера.
3. <http://www.toehelp.ru/theory/informat/lecture13.html>.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге-Кутты.

УДК 519.62

Флегентова Е. И., Кулагина С. В.

Поволжский государственный технологический университет

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА

Аннотация. Работа посвящена решению систем ОДУ методами Рунге-Кутты.

Ключевые слова: явные методы Рунге-Кутты, неявные методы Рунге-Кутты.

Методы Рунге-Кутты (в литературе встречаются названия: **методы Рунге-Кутта** или же **методы Рунге-Кутты**) – большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

К классу методов Рунге-Кутты относятся явный метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера с пересчётом, которые представляют собой соответственно методы первого и второго порядка точности. Существуют стандартные явные методы третьего порядка точности, не получившие широкого распространения.

Дадим определение этих методов применительно к векторной задаче Коши

$$x' = f(t, x), \quad x_0 = x(t_0).$$

Метод

$$x_i = x_0 + h \sum_{j=1}^n b_j k_j, \quad x_i = f\left(t_0 + hc_i, x_0 + h \sum_{j=1}^m a_{ij} k_j\right) \quad (i = 1, \dots, n).$$

называется n -этапным (n -стадийным) *методом Рунге-Кутты* для задачи Коши. Если $m < i$, то метод явный и каждый следующий коэффициент k_i выражается по предыдущим; если $m \geq i$, метод неявный, и коэффициенты находятся из нелинейных уравнений итерационным способом.

Очевидно, метод Эйлера является частным случаем методов Рунге-Кутты, а именно это – явный одноэтапный метод Рунге-Кутты первого порядка. На практике широко применяется явный 4-этапный *классический метод Рунге-Кутты* 4-порядка

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, x_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, x_k + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, x_k + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(t_k + h, x_k + hk_3), \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Простые примеры *явных методов Рунге-Кутты* – это неявный метод Эйлера (первого порядка)

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1})$$

и метод трапеций (второго порядка)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})).$$

Классический метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге-Кутты.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее $y, f, k_i \in R^n, x, h \in R^1$).

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

где h – величина шага сетки по x .

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

Явные методы Рунге-Кутты

Семейство явных методов Рунге-Кутты является обобщением как явного метода Эйлера, так и классического метода Рунге-Кутты четвёртого порядка. Оно задаётся формулами

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

где h – величина шага сетки по x , и вычисление нового значения проходит в s этапов:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1), \\ &\dots \\ k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \dots + a_{s, s-1} h k_{s-1}), \\ &\dots \end{aligned}$$

конкретный метод определяется числом s и коэффициентами b_i , a_{ij} и c_i . Эти коэффициенты часто упорядочивают в таблицу (называемую *таблицей Бутчера*):

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss-1}	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Литература

1. https://www.matburo.ru/Examples/Files/Cm_du_1.pdf.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Эйлера.
3. <http://www.toehelp.ru/theory/informat/lecture13.html>.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге-Кутты.

УДК 519.6

Черных И. Н.

Научный руководитель: Пайзерова Ф. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МОДИФИКАЦИИ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА

***Аннотация.** В данной статье рассматриваются поиск экстремума функции методом наискорейшего спуска и градиентные методы. Приведены эффективные методы одномерной оптимизации.*

***Ключевые слова:** градиент, шаг, итерация, одномерная минимизация.*

Градиентные методы применяются для приближенного решения задачи нелинейного программирования. Они дают возможность решать практически все задачи. Градиент скалярной функции $f(x)$ направлен в сторону наискорейшего возрастания функции и ортогонален линии уровня. В некоторой точке x_k находится градиент функции $f(x)$.

Возьмем в качестве направления спуска p_k в формуле $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$ антиградиент функции $f(x)$ в точке x_k , получим итерационный процесс вида $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Итерационные процессы называются градиентными методами в том случае, если направление движения на каждом шаге совпадает с антиградиентом (градиентом) функции. Различаются они тем, что выбор шага α_k для каждого способа индивидуален.

Рассмотрим градиентные методы с дроблением шага. Выбор шага α_k – первая проблема, с которой сталкиваемся при рассмотрении градиентных методов. Убывание функции обеспечивает достаточно малый шаг α_k , то есть выполнение неравенства $f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) < f(x_k)$. Это может привести к слишком большому количеству итераций, которые следует выполнить, чтобы получить точку минимума. Если взять очень большой шаг, то функция может неожиданно возрасти, что приведет к неблагоприятным колебаниям около точки.

В методе с дроблением шага величина α_k выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) - f(x_k) \leq -\varepsilon \alpha_k \|f'(x_k)\|, \quad (*)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ – произвольная постоянная, которая имеет одно и то же значение для всех итераций. Суть процесса вычислений по формулам $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующий алгоритму с выбором шага, который удовлетворяет неравенству (*), заключается в следующем. Задается число $\alpha > 0$, которое используется на каждой итерации. На k – й итерации проверяется выполнение неравенства (*) при $\alpha_k = \alpha$. Если условие не выполняется, то шаг α_k уменьшается. Проверка неравенства (*) на каждой итерации является затруднительным действием. Можно использовать процесс вычислений с постоянным шагом, если даны некоторые параметры, которые характеризуют функцию $f(x)$, причем функция монотонно убывает. При постоянном шаге необходимо определять только градиент $f'(x_k)$.

Рассмотрим метод наискорейшего спуска. Сначала следует выбрать постоянную величину шага, при которой функция $f(x)$ убывает при переходе от одной итерации к другой. Шаг обычно получается очень малым, поэтому приходится проводить множество итераций для получения точки минимума. Метод наискорейшего спуска – процесс, на

каждой итерации которого шаг α_k выбирается из условия минимума функции $f(x)$ в направлении движения

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha f'(x_k)).$$

На каждой итерации данного метода необходимо решать задачу одномерной минимизации и выбор шага при этом способе более сложный. Направление движения, которое начинается в точке x_k , касается линии уровня в точке x_{k+1} . Последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ зигзагообразно передвигается к точке минимума x^* , причем звенья данного зигзага ортогональны между собой. Шаг α выбирается из условия минимизации по α функции $\varphi(\alpha) = f(x_k - \alpha f'(x_k))$, следовательно, получаем формулу $\frac{d\varphi(\alpha_k)}{d\alpha} = -f'(x_{k+1})f'(x_k) = 0$. На двух последовательных итерациях направления спуска ортогональны между собой. Метод наискорейшего спуска дает выигрыш в количестве машинных операций, так как дает самый выгодный шаг. Основное время машина тратит на вычисление ее градиента $f'(x)$.

Различные алгоритмы градиентного метода основаны на использовании эффективных методов одномерной оптимизации. Одним из часто используемых и простых методов одномерной оптимизации является метод золотого сечения. Последовательный поиск, в котором на k -м шаге каждая из симметрично выбранных на отрезке $[a_k, b_k]$ точек x_{k1}, x_{k2} осуществляет золотое сечение этого отрезка, называют методом золотого сечения. В этом методе каждое исключение отрезка уменьшает оставшийся отрезок в τ раз, где $\tau = l_k / l_{k+1} = l_{k+1} / l_{k+2}$. Так как точки x_{k1}, x_{k2} , $x_{k1} < x_{k2}$ выбраны симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$, то $b_k - x_{k2} = x_{k1} - a_k = l_k - l_{k+1}$, $l_k / l_{k+1} = l_{k+1} / (l_k - l_{k+1})$. Таким образом, получаем квадратное уравнение $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Оно имеет единственное положительное решение, $\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1,618034$. На первом шаге значение функции вычисляют в двух точках, а на каждом последующем шаге вычисляют лишь одно значение функции. Поэтому после k шагов значение функции будет вычислено в $N = k + 1$ точках.

Метод Фибоначчи является процедурой линейного поиска для минимизации строго квазивыпуклой функции на замкнутом ограниченном интервале. Процедура поиска Фибоначчи требует два вычисления функции

на первой итерации, а на каждой последующей – только по одному. Сокращение интервала неопределённости меняется от итерации к итерации.

Метод квадратичной аппроксимации можно применить после локализации точки минимума методом золотого сечения или методом Фибоначчи. Эффективность этого приема возрастает в случае дифференцируемой функции. Производная такой функции в окрестности точки минимума мала и при представлении функции формулой Тейлора в этой окрестности наиболее существенное значение имеет квадратичное слагаемое, содержащее множитель $(x - x^*)^2$. Поэтому многочлен второго порядка в этом случае достаточно хорошо аппроксимирует функцию в окрестности точки минимума.

Литература

1. Аттетков, А. В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 440 с.

Секция «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА»

УДК 535.41

Алексеев А. С.

Научные руководители: Целищева Л. В., канд. техн. наук, доцент;

Гогелашвили Г. Ш., канд. хим. наук, доцент

Поволжский государственный технологический университет

ЦИФРОВОЕ ТЕЛЕВИДЕНИЕ И СОЛНЕЧНАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Аннотация. Представлены методы защиты спутниковой связи от явления солнечной интерференции.

Ключевые слова: цифровое телевидение, солнечная интерференция.

Спутниковая связь является одним из видов космической радиосвязи, основанный на использовании в качестве ретрансляторов искусственных спутников Земли, как правило, специализированных спутников связи. Спутниковая связь – более совершенный вид радиорелейной передачи радиосигнала, за исключением лишь количества ретрансляторов. Особенностью спутниковой связи следует отметить использование в качестве ретранслятора – спутника Земли, расположенного на геостационарной орбите – круговой орбите, расположенной над экватором (0° широты) на высоте 35875 км от поверхности Земли. Выведенный на геостационарную орбиту, искусственный спутник обращается вокруг Земли с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг земной оси. Особенностью расположения спутника на геостационарной орбите является то, что в горизонтальной системе координат направление на спутник не изменяется ни по азимуту, ни по высоте над горизонтом – спутник как бы зафиксирован в небе неподвижно, что позволяет направлять на него неподвижную антенну наземной станции (рис. 1). Общая схема построения передачи сигнала цифрового телерадиовещания выглядит следующим образом: на поверхности Земли установлена передающая спутниковая антенна, направленная на спутник, расположенный на геостационарной орбите, наземная спутниковая станция транслирует телевизионный сигнал в виде направленного электромагнитного излучения на спутник, где полученное электромагнитное излучение усиливается и ретранслируется в направлении к поверхности Земли. На Земле устанавливается спут-

никовая принимающая антенна, направленная на спутник-ретранслятор (рис. 2.)

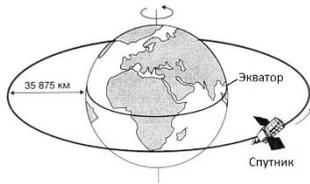


Рис. 1. Геостационарная орбита



Рис. 2. Расположение спутниковой принимающей антенны на Земле, направленной на спутник-ретранслятор

Захваченный телевизионный сигнал усиливается на приемной станции, корректируется и через передающую наземную антенну, круговой диаграммы направленности, расположенную на мачте сравнительно небольшой высоты, (высоты необходимой для беспрепятственного прохождения телевизионного сигнала над ландшафтом поверхности Земли, искусственными сооружениями и постройками) передается в эфирное вещание. В свою очередь, чтобы из эфирного вещания принимать телевизионный сигнал остается направить эфирную ТВ-антенну на передающий центр (башня с передающей антенной) (рис. 3).



Рис. 3. Прием ТВ-сигнала

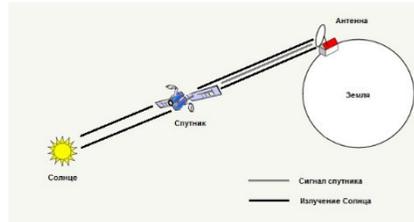


Рис. 4. Солнечная интерференция

Теперь, когда сигнал проходит весь путь от источника до потребителя, можно утверждать, что построенная схема передачи сигнала работает исправно, но даже грамотно рассчитанная схема приема-передачи радиосигнала не может противостоять природным явлениям. Одно из таких явлений проявляется, когда солнце «выходит» на прямую линию Солнце-спутник-приемная спутниковая антенна, в такой ситуации солнечное электромагнитное излучение подавляет «полезный сигнал» транслируе-

мый со спутника, это явление называется солнечной интерференцией (рис. 4). Особенно сильно интерференционному воздействию подвержены спутники, расположенные на геостационарной орбите. В спутниковой связи солнечная интерференция проявляется два раза в год, осенью и весной в дни равноденствия. Продолжительность интерференции зависит от диаметра антенны и точности ее настройки – чем больше диаметр антенны, чем «лучше она настроена», тем короче продолжительность явления, тем меньшее количество дней оно наблюдается, но тем глубже его проявление. Этот эффект объясняется тем, что у больших антенн диаграмма направленности более узкая, причем стоит учитывать, что Солнце практически никогда не оказывается точно за спутником – всегда присутствует какой-либо минимальный угол расхождения. Электромагнитные волны, испускаемые солнцем и имеющие амплитуду гораздо больше амплитуды сигнала спутника, воздействуя на электромагнитные волны сигнала спутника, глушат «полезный» сигнал. Более того, в ясную погоду в период проявления интерференции алюминиевые рефлекторы антенн способны концентрировать солнечные лучи в фокальной точке, в результате чего из-за высокой температуры могут оплавиться пластмассовые детали облучателей. Для решения проблемы воздействия солнечной интерференции на прохождение сигнала можно предложить два пути: 1. между Солнцем и спутником расположить солнцезащитный экран, препятствующий солнечному электромагнитному излучению (проявится явление дифракции солнечного света); 2. создать резервный канал для передачи сигнала на время воздействия солнечной интерференции.

Первый вариант затруднителен, поскольку экран пришлось бы применить невероятных размеров, тень от которого была бы видна на поверхности земли, а также сложно поднять на геостационарную орбиту такой «внушительный» элемент, а вот создать резервный канал передачи сигнала при наличии аналогичных спутников, расположенных «в близости», нет существенных препятствий, необходимо лишь установить дополнительную антенну, направленную на резервный спутник и подключить оборудование для перехода на резервный канал на время «невозможности» передачи сигнала по основному каналу. В результате, если солнечная интерференция будет подавлять сигнал с основного спутника, оказавшегося на прямой линии (передающая станция-спутник-спутниковая антенна), то спутник, расположенный вне зоны воздействия солнечной интерференции, вполне пригоден для использования в качестве резервного ретранслятора. При этом в качестве недостатка можно отметить кратковременные сбои в работе приемного и передающего оборудования в момент переключения. По окончании

проявления солнечной интерференции на основном спутнике (не более 20 минут) можно перевести вещание на основной спутник.

В настоящее время не существует иного, более результативного метода защиты спутниковой связи от явления солнечной интерференции.

УДК 621.311.21

Воробьева Е. Г., Пантелеева В. С.

Научный руководитель: Красильникова С. В., канд. хим. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ ФАКТОР КАК ПРИЧИНА ТЕХНОГЕННОЙ КАТАСТРОФЫ

Аннотация. Рассматриваются причины аварии на Саяно–Шушенской ГЭС.

Ключевые слова: гидроэлектростанция, причины аварии, техногенная катастрофа.

В настоящее время наука и техника достигли такого высокого уровня, что мы уже можем предугадывать многие природные катастрофы, а в скором времени научимся и предупреждать их. Однако этот же технический прогресс породил и такой новый термин как «техногенная катастрофа».

Целью работы явилось рассмотрение причин аварии на Саяно–Шушенской ГЭС и выявление основных предпосылок данной техногенной катастрофы.

Саяно–Шушенская ГЭС является крупнейшей гидроэлектростанцией в России и одной из наиболее крупных ГЭС в мире. Она расположена на реке Енисей, на границе Красноярского края и Республики Хакасии. Гидроэлектростанция – комплекс силовой установки в сооружении, предназначенной для превращения энергии водных источников в электрическую энергию. Водная энергия источника подводится к водяным турбинам, где превращается в механическую энергию. Турбины вращают электрические генераторы, преобразующие механическую энергию в электрическую, которая передается по ЛЭП к потребителю. Действие электромеханического генератора переменного тока основано на явлении электромагнитной индукции. На рисунке схематично показано устройство гидрогенератора.

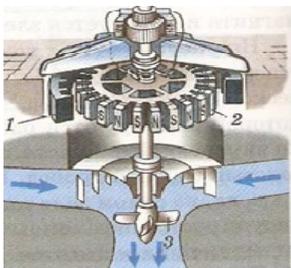


Схема гидрогенератора:
1 – статор, 2 – ротор,
3 – водяная турбина

Статор промышленного генератора представляет собой стальную станину, на которой монтируются различные рабочие узлы, механизмы и пр. Во внутренней его части прорезаются пазы, в которые витками укладывается толстый медный провод. В витках индуцируется переменный электрический ток при изменении пронизывающего их магнитного потока. Ротор гидроге-

нератора имеет несколько пар магнитных полюсов. Чем больше пар магнитных полюсов, тем больше частота переменного электрического тока, вырабатываемого генератором при данной скорости вращения ротора.

Авария на Саяно-Шушенской ГЭС – индустриально-техногенная катастрофа, произошедшая 17.08.2009 года, в результате которой погибло 75 человек, оборудованию и помещениям станции был нанесён серьёзный ущерб. В 8.13 местного времени 17 августа 2009 года произошло внезапное разрушение гидроагрегата № 2 с последующим поступлением значительных объёмов воды. Персонал электростанции, находившийся в машинном зале, услышал громкий хлопок в районе гидроагрегата № 2 и увидел выброс мощного столба воды. Потоки воды быстро затопили машинный зал и помещения, находящиеся под ним. Все гидроагрегаты ГЭС были затоплены, при этом на работавших гидрогенераторах произошли короткие замыкания, выведшие их из строя. Произошёл полный сброс нагрузки ГЭС, что привело, в том числе, и к обесточиванию самой станции.

При правительстве РФ была создана специальная комиссия, которая провела расследование причин техногенной катастрофы. В опубликованном документе о причинах аварии было сказано: «Большинство причин носит системный многофакторный характер, включая недопустимо низкую ответственность эксплуатационного персонала, недопустимо низкую ответственность и профессионализм руководства станции, а также злоупотребление служебным положением руководством станции. Не был должным образом организован постоянный контроль технического состояния оборудования оперативно-ремонтным персоналом (что должно предусматриваться инструкцией по эксплуатации гидроагрегатов Саяно-Шушенской ГЭС, утверждённой главным инженером СШГЭС от 18.05.2009 г.). Основной причиной аварии стало непринятие мер к оперативной остановке второго гидроагрегата и выяснения причин вибрации» [1].

Развитие современной техники и технологии не стоит на месте, конструируются новые приборы, совершенствуется оборудование. Человечество, все чаще доверяя технике, зачастую забывает, что у техники есть свои сроки эксплуатации и износа. Для будущих инженеров по технике безопасности и охране труда необходимо как знание основных принципов работы оборудования, так и причин их неисправностей. Таким образом, человеческий фактор играет важную роль в предотвращении техногенных катастроф.

Литература

1. Разрушение гидроагрегата № 2 Саяно-Шушенской ГЭС: причины и уроки. Сборник материалов. – М.: НП «Гидроэнергетика», 2013. – 496 с.

УДК 538.945:537.6

Воронцова В. В., Колесова А. Д.

Научный руководитель: Ладычук Д. В., канд. хим. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЭФФЕКТ МЕЙСНЕРА И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

***Аннотация.** Рассмотрено влияние магнитного поля на сверхпроводящее состояние вещества, описан эффект Мейснера в сверхпроводниках.*

***Ключевые слова:** сверхпроводимость, намагниченность, эффект Мейснера, вихри Абрикосова.*

Явление сверхпроводимости – резкое уменьшение или полное отсутствие электрического сопротивления при низких температурах в проводниках – долго считалось их главным и единственным характеристическим свойством. Оно наблюдается в широком температурном интервале ($T=0,01-100$ К), при этом каждое вещество характеризуется своим значением критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние (T_k). Позже выяснилось, что магнитное поле изменяет сверхпроводимость веществ и критическая величина напряженности H_k является функцией температуры $H_k(T)$, причем $H_k(T_k)=0$. На фазовой диаграмме сверхпроводника кривая $H_k(T)$ разделяет области нормального и

сверхпроводящего состояния. Для сверхпроводника величина $H_k(0)$ пропорциональна значению T_k .

В 1933 году Мейснером и Оксенфельдом было экспериментально установлено [1], что в постоянном и не очень сильном магнитном поле при охлаждении и переходе в сверхпроводящее состояние (при $T < T_k$), магнитное поле, первоначально пронизывающее образец (при $T > T_k$), выталкивается из толщи сверхпроводника и внутри образца индукция B становится равной нулю (рис. 1).

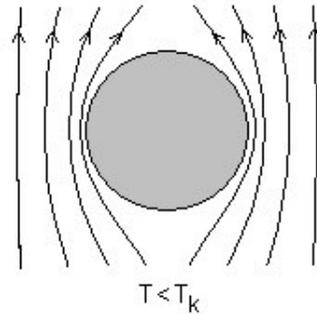


Рис. 1. Эффект Мейснера в сверхпроводниках

Эффект Мейснера можно наблюдать в эксперименте – при контакте магнита с поверхностью плоского сверхпроводника при температуре жидкого азота наблюдается левитация – магнит висит на некотором расстоянии от поверхности, не касаясь ее (при $B=0,001$ Тл $h=0,01$ м). Опыт объясняется тем, что магнитное поле выталкивается из сверхпроводника, в связи с этим магнит, приближающийся к сверхпроводнику, согласно методу изображений, «увидит» магнит одинаковой полярности и точно такого же размера, что и вызовет левитацию.

По виду кривых намагниченности сверхпроводники разделяются на 2 типа. Для сверхпроводников 1-го рода (мягких) (рис. 2, а), состоящих из атомов одного химического элемента, намагниченность при $H > H_k$ ничтожно мала, и образец ведет себя как нормальный проводник.

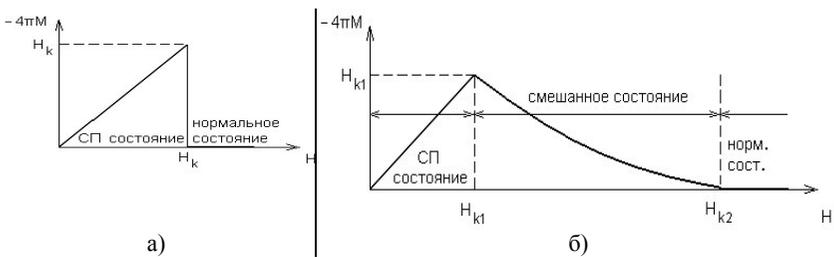


Рис. 2. Кривые намагниченности для сверхпроводников первого (а) и второго рода (б)

При $H < H_k$ намагниченность M равна $-H/4\pi$ и ее отрицательное значение соответствует диамагнетизму. Магнитное поле, создаваемое сверхпроводящими токами, индуцированными внешним магнитным

полем, характеризуется величиной $4\pi M$. Для указанных материалов $H_c=100$ эрстед, и они не используются в сверхпроводящих магнитах.

Сверхпроводники 2-го а (жесткие) (рис. 2, б), к которым относятся сплавы и металлокерамика, при $H < H_{k1}$ ведут себя как сверхпроводники 1-го рода. В интервале между H_{k1} и H_{k2} величина M падает, хотя их электрические свойства остаются сверхпроводящими. В сверхпроводнике образуются области, в которых магнитный поток имеет конечную величину, значение индукции B не равно нулю, и это состояние называется смешанным. Величина H_{k2} составляет сотни килоэрстед, и данные материалы используются для создания сверхпроводящих магнитов.

Таким образом, полный эффект Мейснера наблюдается в сверхпроводниках 1-го рода. В сверхпроводящих сплавах полный эффект Мейснера наблюдается лишь в слабых магнитных полях. В сильных полях он является частичным. В этом случае магнитное поле

проникает в объем сверхпроводника в виде узких пучков магнитных линий. Внутри этих пучков вещество переходит из сверхпроводящего в обычное состояние, а между пучками остается в сверхпроводящем состоянии. Вокруг пучков магнитных линий в сверхпроводнике образуются поверхностные токи (рис. 3), названные вихрями Абрикосова [2].

Они поддерживают пучки в объеме сверхпроводника, при снятии внешнего магнитного поля эти токи остаются. Вихри Абрикосова на больших расстояниях внутри проводника притягиваются друг к другу, а на малых – отталкиваются друг от друга. В результате они образуют структуру с дальним порядком, подобную двумерному кристаллу, в котором два измерения перпендикулярны пучкам линий магнитного поля. Такой сверхпроводник создает вокруг себя магнитное поле, подобно постоянному магниту, что широко используется на практике.

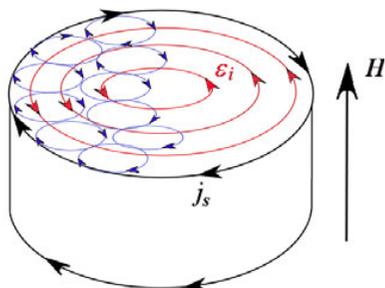


Рис. 3. Поверхностные токи в сверхпроводниках

Литература

1. Гиндзбург, В. Л. Сверхпроводимость / В. Л. Гиндзбург, Е. А. Андрюшин. – М.: Педагогика, 1990. – 112 с.: ил.
2. Тинкхам, М. Введение в сверхпроводимость / М. Тинкхам. – М.: Атомиздат, 1980. – 310 с., ил.

Девятова Д. А.

Научные руководители: Гогелашвили Г. Ш., канд. хим. наук, доцент;

Целищева Л.В., канд. техн. наук, доцент

Поволжский государственный технологический университет

КВАНТОВАЯ ЗАЩИТА КОММУНИКАЦИЙ

***Аннотация.** Представлен один из методов квантовой защиты коммуникаций.*

***Ключевые слова:** квантовая криптография, квантовая защита, коммуникации.*

Криптография – наука о методах обеспечения конфиденциальности (невозможно прочесть информацию постороннему человеку), сохранности данных (нельзя изменить информацию), аутентификации (проверка подлинности авторства информации).

Квантовая криптография является одним из методов защиты коммуникаций, основанном на определенных явлениях квантовой физики. В отличие от традиционной криптографии, использующей математические методы для обеспечения секретности информации, квантовая криптография базируется на законах физики, рассматривая при этом случаи, когда информация переносится с помощью объектов квантовой механики. Так, процесс отправки и приёма определенной информации всегда выполняется физическими средствами, например, при помощи электронов в электрическом токе, или фотонов в линиях волоконно-оптической связи и т. п.

На рисунке представлена схема реализации квантовой криптографии: передающая сторона расположена слева, а принимающая – справа, ячейки Покеля применяются для импульсной вариации поляризации потока квантов передатчиком и для анализа импульсов поляризации приемником. Передатчик формирует одно из четырех состояний поляризации, и передаваемые данные поступают в виде управляющих сигналов на эти ячейки. В качестве канала передачи данных использовано оптоволокно, в качестве первичного источника света – лазер.



Схема реализации идеи квантовой криптографии

На принимающей стороне после ячейки Покая расположена кальциитная призма, расщепляющая пучок на два фотодетектора (ФЭУ), которые измеряют две ортогональные составляющие поляризации. При формировании передаваемых импульсов квантов возникает проблема их интенсивности. Так, например, если квантов в импульсе 10000, то существует вероятность, что 1000 квантов по пути будут отведены злоумышленниками на свой приемник и, анализируя далее открытые переговоры между передающей и принимающей стороной, они могут получить необходимую им информацию, следовательно, в идеале число квантов в импульсе должно быть около одного – в этом случае, любая попытка отвода части квантов злоумышленниками приведет к существенному изменению всей системы в целом и, как следствие, к росту количества ошибок у принимающей стороны.

Разрабатывая канал более устойчивый к перехвату информации, возникает проблема «темнового» шума приемника (получение сигнала, который не был отправлен одной из передающих сторон), чувствительность которого повышена до максимума, поэтому для того, чтобы обеспечить надежную передачу данных, логическому нулю и единице могут соответствовать определенные последовательности состояний, которые допускают коррекцию одинарных и даже повторяющихся ошибок, но для этого важно понять, как работают простые шифры (квадрат Полибия, шифр Цезаря, квадрат Виженера и т. д.), поскольку они являются базой, на которой строится всё шифрование (сообщение с помощью определенного алгоритма комбинируется с дополнительной секретной информацией (ключом), в результате чего получается криптограмма).

Безусловно, квантовая криптография является очень перспективным методом защиты информации, поскольку применяемые здесь технологии позволяют вывести безопасность информации на высочайший уровень.

Домрачева А. А., Мальцева Е. М.
Научные руководители: Кречетова И. В., ст. преподаватель,
Ладычук Д. В., канд. хим. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ЧЕРНОБЫЛЬСКАЯ АВАРИЯ: ВЗГЛЯД СЕГОДНЯ И 30 ЛЕТ НАЗАД

Аннотация. *В статье представлены хроника событий и причины катастрофы на ЧАЭС. Дается оценка влиянию радиоактивного загрязнения на живую природу. Приведены различные взгляды на события тридцатилетней давности.*

Ключевые слова: *радиация, радиоактивные вещества, ядерный реактор, зона отчуждения, адаптация.*

Цель работы: изучение последствий аварии на Чернобыльской АЭС и приведение различных точек зрения на события 26 апреля 1986 года: сегодня и 30 лет назад.

Авария произошла на 4-м энергоблоке Чернобыльской АЭС ночью 26 апреля 1986 г. В результате аварии произошел выброс в окружающую среду радиоактивных веществ, в том числе изотопов урана, плутония, йода-131, цезия-134, цезия-137 (период полураспада – 30 лет), стронция-90 (период полураспада – 28,8 лет).

В своей книге, вышедшей в печать в 1987 году, авторы Иллеш А. В., Пральникова А. Е. пишут о событиях того дня: «суть произошедшего: четвертый блок должны были, как запланировано, после двух лет работы остановить для ремонта. Перед остановкой дирекция атомной станции наметила провести испытания одного из турбогенераторов. А качество программы оказалось, увы, низким. В этой программе не были предусмотрены необходимые меры безопасности, ... цепочка нарушений закончилась неожиданно для его создателей и для тех, кто там экспериментировал... Закончилось взрывом.» [1].

В результате производственного эксперимента персонал станции потерял контроль над реакцией, аварийная защита не сработала, и мощность реактора резко возросла с 0,2 до 320 гигаватт.

Барановская Н. П. пишет: «Примерно через 20 часов после взрыва подул ветер в направлении Припяти, уровни радиационного фона силь-

но выросли, началась эвакуация. Радиоактивный пепельный шлейф прошел на северо-запад – на города и села Белоруссии, России, затем в Финляндию, Швецию, Норвегию [2].

Согласно общепринятой версии, было два мощных взрыва. Первый взрыв произошел оттого, что вода из системы охлаждения испарилась и разрушила трубы, после чего попала на крайне горячую циркониевую оболочку ТВЭЛов. Затем образовавшийся водород взорвался при взаимодействии с кислородом.

Сегодня в прессе появляются исследования зарубежных ученых о трагедии 1986 года. Группа шведских ученых проанализировала концентрации изотопов ^{133}Xe и $^{133\text{m}}\text{Xe}$ в образцах череповецкой фабрики по сжижению воздуха, а также смоделировала погодные условия после катастрофы 1986 года, выразив сомнение, что первый взрыв был тепловым (статья опубликована в Nuclear Technology Lars-Erik De Geer et. al. / Nuclear Technology, 2017 г.).

Сразу после аварии на ЧАЭС в результате интенсивных работ вокруг 4-го энергоблока был построен саркофаг, именуемый объектом «Укрытие». Конструкция уникальная, но из-за спешки осталось много щелей и отверстий, из них продолжают вырываться радиоактивные аэрозоли. Вокруг Чернобыля установлена 30-километровая запретная зона. Эта зона признана опасной для проживания людей [3].

Для исключения рисков, связанных с высокой степенью обрушения, в 2016 году был установлен объект «Укрытие-2.» Заброшенные людьми инфраструктура и дома в зоне ЧАЭС спустя 30 лет пришли в запустение. Это позволило животным заходить в город, иногда даже устраивать жилище на территории заброшенных зданий. Здесь восстановились популяции находившихся под угрозой вымирания животных – в зарослях и болотах замечены исчезающие виды птиц.

«Макет Земли после исчезновения человечества» – эта метафора стала уже привычной, если речь заходит о зоне отчуждения вокруг Чернобыльской АЭС. Однако Чернобыльская зона сегодня – это уникальная местность, большая часть которой покрыта густой растительностью и населена сотнями видов животных, в том числе занесенных в Красную книгу [4].

Радиационное загрязнение до сих пор негативно отражается на здоровье людей, живущих в областях, подвергшихся активному заражению в 1986 году. По результатам исследования, проведенного студентами Смоленского государственного медицинского университета, отмечается значительный рост онкологических заболеваний в Брянской и Смолен-

ской областях. Онкология регистрируется у людей практически всех возрастов, реже – у рожденных в год аварии на ЧАЭС и позднее. По итогам исследования был сделан вывод, что рак встречается либо у пациентов, которые сами подвергались облучению, либо у тех, чьи матери, будучи в положении, получили дозу радиации [5].

Вывод. По нашему мнению, авария считается крупнейшей в своем роде за всю историю атомной энергетики. Достижения научно-технического прогресса предоставили человеку огромные возможности для использования энергии атома, но нельзя полагаться только на технику, какой бы надёжной она не казалась. С другой стороны, отсутствие людей в зоне отчуждения Чернобыльской АЭС становится фактором, который не мешает выживанию популяции редких животных и птиц с возможностью проведения там научных исследований о влиянии радиации на состояние среды. Опубликованные результаты экспериментов показали рост онкологических заболеваний среди лиц, рожденных раньше 1986 года. В нынешних условиях стало возможным для туристов стать участником необычных туров в эти места. Все авторы исследований чернобыльской аварии сегодня и тридцать с лишним лет назад едины во мнении, что Чернобыль – это страшное напоминание о том, как бы далеко не шагнула наука, всегда есть вероятность, что любое, даже самое благое начинание, может обернуться самой страшной катастрофой.

Литература

1. Иллеш, А. В. Репортаж из Чернобыля: Записки очевидцев. Комментарии. Размышления / А. В. Иллеш, А. Е. Пральникова. – М.: Мысль, 1987. – 157 с.
2. Чернобыльская трагедия. Документы и материалы. Автор и составитель: Наталия Петровна Барановская. – Киев: Наукова думка, 1995. – 508 с.
3. Возняк, В. Я. Чернобыль: события и уроки. Вопросы и ответы / В. Я. Возняк, А. П. Коваленко, С. Н. Троицкий. – М.: Политиздат, 1989. – 278 с.
4. Иванников, В. А. Тяжкое наследие: [20-летие Чернобыльской катастрофы] / В. А. Иванников // Экология и жизнь. – 2006. – №4. – С. 4-8.
5. Лашук, Н. С. Чернобыль. 30 лет спустя / Н. С. Лашук, Д. С. Зубарев // Смоленский медицинский альманах. – 2018. – №2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/chemobyl-30-let-spustya> (дата обращения: 07.05.2019).

Леухин М. Д., Михеева П. К., Соколова Ю. А.
Научные руководители: Красильникова С. В., канд. хим. наук, доцент;
Комелин П. А., зав. лаб. кафедры физики
Поволжский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ β -ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Аннотация. В работе экспериментально изучается поглощение β -частиц различными материалами.

Ключевые слова: β -излучение, кривые поглощения, материалы.

Ионизирующие излучения сопровождают современного человека на каждом шагу. Известно, что радиоактивные излучения при определенных условиях могут представлять опасность для здоровья живых организмов. Поэтому современный инженер должен понимать природу этих излучений и трезво оценивать опасность радиоактивного заражения.

Как известно [1], радиоактивное излучение бывает трех типов: α -, β - и γ -излучение. α -излучение представляет собой поток ядер гелия, отклоняется электрическими и магнитными полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (например, поглощается слоем алюминия толщиной 0,05 мм). β -излучение представляет собой поток быстрых электронов (позитронов), ионизирующая способность которого значительно меньше, а проникающая способность гораздо больше (поглощается слоем алюминия толщиной 2 мм), чем у α -частиц. γ -излучение – поток γ -квантов (фотонов) обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (проходит через слой свинца толщиной 5 см).

Цель данной работы заключалась в снятии кривых ослабления различными материалами при прохождении β -излучения через вещество. Работа проводилась на установке, изображенной на рисунке. В качестве объектов исследования были взяты фанера, латунь, алюминиевая фольга и цемент. При прохождении через вещество пучок быстрых электронов уменьшает свою интенсивность, что позволяет говорить о поглощении β -частиц.



Рис. 1. Схема установки:

- 1 – свинцовый домик, 2 – счетчики Гейгера-Мюллера, 3 – кювета с радиоактивным веществом, 4 – соединительный кабель, 5 – измерительный блок

Наблюдаемое суммарное ослабление пучка β -частиц в зависимости от толщины поглощающего слоя описывается выражением:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (1)$$

где I и I_0 – соответственно интенсивность излучения до поглотителя и после прохождения поглотителя толщиной x , μ – линейный коэффициент поглощения.

Поскольку интенсивность β -излучения пропорциональна числу регистрируемых β -частиц регистрирующим прибором, то выражение (1) можно записать в виде:

$$N = N_0 e^{-\mu x}, \quad (2)$$

где N и N_0 – число регистрируемых β -частиц до поглотителя и после прохождения поглотителя толщиной x соответственно. На рис. 2 представлены кривые ослабления алюминиевой фольги, латуни и цемента.

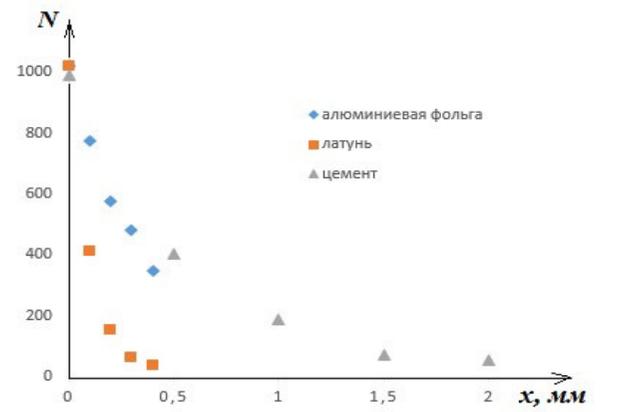


Рис. 2. Кривые ослабления

По кривой ослабления можно определить толщину слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ и коэффициент поглощения μ . Данные представлены в таблице.

Материал	$X_{1/2}$, мм	μ
Алюминиевая фольга	0,18	3,85
Латунь	0,09	7,70
Цемент	0,50	1,39

Данные таблицы свидетельствуют о том, что лучшей поглощательной способностью β -частиц обладает латунь. Строительные материалы на основе цемента (например, бетон) только при большой толщине могут задерживать β -излучение.

Литература

1. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая шк., 1999. – 718 с.

УДК 537

Милкова А. А.

Научный руководитель: Косова Г. Н., канд. физ.-мат. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

МГД ГЕНЕРАТОР

Аннотация. Рассмотрены история создания, принцип работы, проведена классификация магнитогидродинамических генераторов по различным параметрам.

Ключевые слова: магнитогидродинамический генератор, линейный МГД канал, электродвижущая сила, коэффициент полезного действия, электроэнергетика.

Лондон, 1832 год, мост Ватерлоо. Посередине моста стоит стол, на нём – гальванометр, соединённый проводами с двумя медными листами, опущенными в Темзу. В этом году Майкл Фарадей доказал, что в движущемся проводнике, находящемся под действием магнитного поля, возникает электрический ток. Он предположил, что и в водах реки, те-

кущей с запада на восток и пересекающей магнитное поле Земли, должен возникнуть электрический ток. Медные листы, между которыми, как между металлическими берегами, текла вода Темзы, должны были соединить этот жидкий проводник с гальванометром, и передать на него возникающий ток. Однако опыт не удался из-за низкой электропроводности воды и малой величины напряженности магнитного поля Земли. Но этот год можно смело назвать годом рождения магнитогидродинамического генератора. Название генератора состоит из трёх частей – магнит, гидро и динамика, то есть электричество вырабатывается при движении воды в магнитном поле.

В 1851 году английский учёный Уолластон измерил ЭДС, индуцированную приливными волнами Ла-Манша. Но электрофизические свойства газов и жидкостей оставались неизученными, что тормозило использование эффектов на практике.

В 1907-1910 годах были выданы первые патенты МГД генераторов. Рабочим телом в них был ионизированный газ – распространённый продукт сгорания различного топлива. Тем не менее, дальше патентов дело не пошло, так как не было материалов, способных выдержать температуру 2500-3000°С.

И только в 1944 году шведский учёный Ганнес Альвен, изучая поведение заполняющей межзвёздное пространство космической плазмы в магнитном поле, вывел основные законы магнитной гидродинамики.

Первый МГД генератор был построен в США в 1959 году. Рабочим телом служила плазма, нагретая до 3000К. Её источником был плазмотрон, работавший на аргоне с присадкой щелочного металла для повышения степени ионизации газа. Мощность генератора составила 11,5 кВт.

Рассмотрим простейшую схему МГД генератора. На рисунке слева схема МГД генератора с линейным каналом: 1 – источник рабочего тела, 2 – сопло, 3 – МГД канал, 4 – электромагнит, 5 – электроды, 6 – диффузор, 7 – нагрузка, I_H – полный ток в нагрузке.

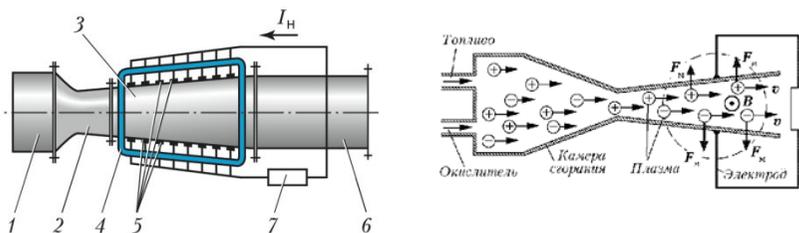


Схема МГД генератора

В камере сгорания сжигается топливо, в сопле продукты сгорания, расширяясь, достигают сверхзвуковой скорости и подаются в МГД канал, находящийся между полюсами сильного электромагнита, а внутри – электродов. Рабочее тело движется поперёк магнитного поля, и под действием магнитного поля возникают противоположно направленные потоки носителей зарядов противоположных знаков. Эти потоки заряженных частиц вызывают появление электрических зарядов на соответствующих электродах и электрического тока.

МГД генераторы обладают высоким КПД. Максимальный КПД тепловых электростанций на сегодняшний день составляет 43-47%. Используя МГД генератор на электростанции, можно добиться максимального значения КПД равного 65%.

Классификация МГД генераторов. МГД генераторы различают по источнику теплоты на камеры сгорания химического топлива, в том числе и реактивных двигателей, на ядерные и термоядерные реакторы и на теплообменные устройства. Основные типы разделения МГД генераторов по рабочему телу – это различные плазмообразующие среды, жидкие металлы, эвтектики, электролиты, двухфазные электропроводящие среды. По способу отвода электроэнергии МГД генераторы можно разделить на кондукционные (постоянного и переменного тока) и индукционные. В кондукционных генераторах генерируемый ток поступает на токосъёмные электроды МГД канала и далее в нагрузку. В индукционных генераторах, вырабатывающих только переменный ток, отсутствуют токосъёмные электроды, а наведённые в движущейся электропроводящей среде токи индуктивно связаны с внешней обмоткой. По геометрической форме и типу конструкции МГД каналы бывают линейными, дисковыми, коаксиальными холловскими, радиальными, электродными и безэлектродными (индукционными), охлаждаемыми и не охлаждаемыми и т. д. По типу магнитной системы различают: электромагниты с ферромагнитным магнитопроводом с индукцией магнитного поля до 2Тл в стационарном режиме работы; безжелезные резистивные, создающие магнитное поле до 5Тл; безжелезные криорезистивные для работы в стационарном режиме (материал обмотки – сверхчистый алюминий); и сверхпроводящие, обеспечивающие магнитное поле до 10Тл. По типу рабочего цикла МГД генераторы делятся на генераторы открытого и замкнутого циклов. По электрической схеме соединения электродов в линейных МГД генераторах различают: канал с секционированными электродами, холловский канал, в котором электроды, расположенные напротив друг друга, коротко замкнуты, а напряжение возника-

ет вдоль канала за счёт поля Холла, и с диагональным соединением электродов.

Разработка и изучение возможностей МГД генераторов различных типов проводится для областей электроэнергетики, в которых они являются наиболее выгодными или не имеют аналогов.

Литература

1. Магнитогидродинамический генератор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://clck.ru/DaKsB>.
2. Панченко, В. П. Магнитогидродинамический генератор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://clck.ru/FTKWu>.
3. Гулиа, Н. В. Удивительная физика / Н. В. Гулиа. – М.: ЭНАС, 2012. – 416 с.

УДК 621.311.25

Садовина Е. А.

Научный руководитель: Красильникова С. В., канд. хим. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ФУКУСИМА-1: ПРИЧИНЫ И ПОСЛЕДСТВИЯ АВАРИИ

Аннотация. В работе рассматриваются причины и последствия катастрофы на АЭС Фукусима-1.

Ключевые слова: Фукусима-1, авария, причины, последствия.

Атомная энергетика – практически неисчерпаемый источник недорогой электроэнергии, которая с середины прошлого века спасает мир от энергетического голода. Но атомные электростанции – это не только реки дешевого электричества, но и самые страшные радиационные катастрофы, способные уничтожить целую страну.

В основе работы любой атомной электростанции лежит мощная реакция, которая возникает при делении ядра атома урана-235 или плутония. Ядро атома делит нейтрон, попадающий в них извне. При этом возникают новые нейтроны, а также осколки деления, которые имеют огромные кинетические энергии. Как раз эта энергия и выступает главным и ключевым продуктом. Атомная электростанция работает в определенных условиях и в строго заданных режимах.

АЭС Фукусима-1 входила в число мощнейших АЭС мира. Она состояла из 6 энергоблоков, которые до аварии отдавали в электрическую сеть до 4,7 ГВт энергии. На момент катастрофы в рабочем состоянии находились только 1, 2 и 3-й реакторы, 4, 5 и 6-й реакторы были оставлены для планового ремонта. Также на момент катастрофы в бассейнах выдержки каждого энергоблока находился небольшой запас свежего топлива и достаточно большое количество отработанного [1].

Авария на АЭС Фукусима-1, произошедшая 11.03.2011 года, – единственная радиационная катастрофа, вызванная стихийным бедствием. По официальной версии основная причина аварии – это землетрясение, которое вызвало цунами. В результате этого вышли из строя приборы электроснабжения, что привело к нарушению работы абсолютно всех систем охлаждения, в том числе и аварийных, произошло расплавление активной зоны реакторов работающих энергоблоков. Начали образовываться пар и повышаться давление, происходило тепловыделение в атмосферу. На одном из энергоблоков станции произошел первый взрыв, обрушились бетонные конструкции, уровень радиации в атмосфере возрос в считанные минуты.

Одной из причин трагедии считается неудачное размещение станции. Было крайне неразумно строить АЭС около воды. Что касается самого возведения конструкции, то инженеры должны были учесть, что в этой местности происходят цунами и землетрясения. Ещё одной причиной указывается недобросовестная работа руководства и работников Фукусимы-1, которая состоит в том, что аварийные генераторы находились в плохом состоянии, поэтому они вышли из строя.

Авария на атомной станции Фукусима-1 имела самые пагубные последствия: заражение воздуха, воды и земли высокоактивными продуктами деления ядерного топлива. Наибольшие загрязнения получила морская вода, которая закачивалась в реакторы в первую неделю после аварии. Ведь эта вода, проходя активную зону реакторов, снова попадала в океан. В результате уже к 31 марта 2011 года радиоактивность океанской воды на расстоянии 330 метров от станции превышала допустимую норму в 4385 раз! В настоящее время этот показатель значительно снизился, но радиоактивность побережья у станции практически в 100 раз выше всех допустимых норм. В настоящее время станция бездействует, однако на ней ведутся работы по содержанию реакторов и бассейнов выдержки в стабильном состоянии [2,3].

Вообще, различные катастрофы на АЭС отличаются от обычных промышленных аварий глобальным радиационным воздействием, несравнимой длительностью последствий и сильнейшим психологическим

стрессом, связанным с тем, что в общественном сознании атомная энергетика тесно ассоциирована с атомной бомбой. После каждой из них принимаются решения, влияющие на мировое атомное сообщество, и затрачиваются огромные средства на ликвидацию последствий аварии, которые зачастую превышают стоимость самой АЭС и выручку от произведённой на ней электроэнергии за всё время эксплуатации [4]. В настоящее время необходим международный проект с участием квалифицированных специалистов для анализа уроков катастроф на ТМІ, в Чернобыле и на Фукусиме-1 для того, чтобы выработать на их основе рекомендации по управлению авариями для всех действующих и предполагаемых к сооружению АЭС, включая построенные по ранним стандартам безопасности.

Литература

1. <http://nuclphys.sinp.msu.ru/ecology/fukushima/index.html>.
2. http://www.iaea.org/press/?page_id=97.
3. <http://www.jaif.or.jp/english/>.
4. <http://energyfuture.ru/category/atomenergy/chp/fukusima>.

УДК 621.85-52; 531/534

Алгаева Н. С., Вавилов А. С., Лебедев Г. В.,
Лоскутов Ю. В., канд. техн. наук, доцент

Поволжский государственный технологический университет

РЕСУРСНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ЭКЗОСКЕЛЕТА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫМИ ФОРСИРОВАННЫМИ МЕТОДАМИ

Аннотация. В работе выполнено расчетное обоснование эквивалентности по энергетическим показателям режимов работы экзоскелета с весовым манекеном при педалировании на велотренажере и ходьбе с пациентом. Критерием эквивалентности выбраны приведенные мощность, работа и моменты в шарнирах. Сопоставление результатов вычислительного эксперимента показало возможность данного вида форсированных ресурсных испытаний.

Ключевые слова: экзоскелет медицинского назначения, локомоции человека, ресурсные испытания, энергетическая эквивалентность.

Экзоскелет используется как для увеличения возможностей здорового человека, так и для помощи пациентам с нарушениями опорно-двигательного аппарата [1]. При запуске экзоскелета в производство обязательны его ресурсные испытания. Проведение их в штатном режиме эксплуатации (ходьба, присед) опасно для оператора, требует больших помещений и затрат человеко-часов операторов, ассистентов, следящих за балансом равновесия и безотказностью систем человек-экзоскелет (или весовой манекен-экзоскелет). Поэтому **актуальность работы** обусловлена необходимостью разработки стационарных методик испытаний экзоскелета, позволяющих эквивалентно воссоздать различные циклы работы, в том числе в форсированном режиме, исключая перемещение в пространстве.

Цель работы – оценка возможности и обоснование испытаний электромеханических частей привода реабилитационного экзоскелета медицинского назначения (РЭМ) на велостенде.

Выполним расчетное обоснование эквивалентности по энергетическим показателям режимов работы экзоскелета с весовым манекеном при педалировании на велотренажере и ходьбе с пациентом. Критерием эквивалентности движений в шарнире принимается:

$$- \text{среднеквадратичный момент } M_{\text{экс}} = \sqrt{\sum t_i M_i^2 / \sum t_i}, \text{ Нм,}$$

– эквивалентная мощность $P_{экв} = \sqrt{\sum t_i P_i^2 / \sum t_i}$, Вт,

– средняя частота оборотов между звеньями $n_{cp} = \sum t_i n_i / \sum t_i$, об/с.

Для оценки возможности ресурсных испытаний РЭМ на велотренажере рассмотрим параметры педалирования: частоту и шаг. Эти параметры имеют аналоги в других видах функциональных движений, например, ходьбе по горизонтальной поверхности [2-3]. Анализ ходьбы [2, 4] показывает, что удельную работу \tilde{A} (приходящуюся на единицу пути), развиваемую при ходьбе мощность P и оптимальную длину шага $L_{опт}$ можно рассчитать по формулам

$$\tilde{A} = \left(\frac{mgL}{4h} \right) + \left\{ 4\mu \frac{mgh}{L} (Fr)^2 \right\}, \quad (1)$$

$$\tilde{A}_{опт} = 2 \cdot m \cdot g \cdot (Fr) \cdot \sqrt{\mu}, \quad (2)$$

$$P = \left(\frac{mgL}{4h} v \right) + \left\{ 4\mu \frac{m}{L} v^3 \right\}, \quad (3)$$

$$L_{опт} = 4 \cdot v \cdot \sqrt{\mu \cdot h / g}, \quad (4)$$

где m – масса человека; g – ускорение свободного падения; L – длина шага; h – вертикальная координата положения центра масс; $\mu = m_{ноги} / m_{корп}$ – отношение массы ноги к массе корпуса; $Fr = v / \sqrt{g \cdot h}$ – число Фруда; v – скорость передвижения.

Первые члены уравнений (1) и (3) в круглых скобках определяют работу и мощность, затрачиваемые на поддержание тела, вторые члены (в фигурных скобках) – на перенос ноги. Численные решения уравнений (1-4) [3] показали, что при $h = 1$ м и $v = 1,25$ м/с (или 4,5 км/ч) оптимальная длина шага при ходьбе составляет $L_{опт} = 0,7$ м при частоте шага $f_{опт} = 105,3$ шаг/мин. Мощность будет составлять $P_{мин} = 150$ Вт.

Отмечено [4], что оптимальный шаг при ходьбе приблизительно равен шагу педалирования, то есть четырехкратной длине кривошипа. Стандартная длина кривошипа гоночного велосипеда равна 0,171 м (6,75") или 0,178 м (7,0"). Таким образом, шаг педалирования составляет соответственно 0,684 или 0,712 м. При аналогичной мощности ($P = 150$ Вт) езда на велосипеде с частотой педалирования $f = 105,3$ об/мин позволяет развить скорость 24 км/ч.

Такая закономерность получена в результате стремления конструкторов велосипеда и спортсменов-велогонщиков к максимальной эконо-

мичной организации функционального движения. В теории ходьбы и педалирования велосипеда разные пути поиска оптимальных решений привели к общему результату: оптимальные по мощности шаг ходьбы и шаг педалирования приблизительно равны между собой при одинаковой частоте функциональных движений.

На основе анализа графиков движений и табличных данных [2, 4, 5], аппроксимации полученных результатов сопоставлены основных параметры движений.

Выводы

1. Сопоставление значений основных параметров локомоций (ходьба, вставание-присед и велопедальирование) дает небольшие расхождения наибольших эквивалентных моментов, средних межзвенных частот оборотов и эквивалентных мощностей в шарнирах при сходных энергозатратах.

2. По энергетическим показателям режимов работы экзоскелета с весовым манекеном локомоции (ходьба, вставание-присед и велопедальирование) вполне могут быть эквивалентны при правильном выборе параметров движений.

3. На основании вышеизложенного использование велотренажера для проведения испытаний на надежность экзоскелета вполне может быть допустимо.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»», шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Состояние рынка интеллектуальной собственности экзоскелетов для роботизированной реабилитации пациентов с нарушениями функций нижних конечностей / И. Н. Багаутдинов, В. А. Грязин, Ю. В. Лоскутов и др. // Вестник Поволжского гос. технол. ун-та. Сер.: Экономика и управление. – 2017. – № 3 (35). – С. 90-96.
2. Winter, David A., Biomechanics and motor control of human movement / David A. Winter. – JOHN WILEY & SONS, INC., 2009 – 370 p.
3. Yury Loskutov, et al. Synthesis of exoskeleton control algorithms based on kinematic analysis of locomotions and human gait modeling // Journal of Applied Engineering Science. 2018 – Vol. 16, No. 4, P. 583-591. DOI:10.5937/jaes16-17230.
4. Любовицкий, В. П. Гоночные велосипеды / В. П. Любовицкий. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 319 с.

5. Турлапов, Р. Н. Модели и алгоритмы управления движением экзоскелета для вертикализации и расширения функциональных возможностей человека: рук. дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – Курск: ФГБОУ ВО «Юго-Запад. гос. ун-т», 2015. – 172 с.

УДК 534.376:624.07

Алтайбай А. М.

Научный руководитель: Нуримбетов А. У., д-р техн. наук, профессор Таразский государственный университет им. М. Х. Дулати, Казахстан

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация. Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из композиционного материала. Используется теория слоистых армированных сред, которая при расчете элементов конструкций из композиционного материала позволяет получить удовлетворительное совпадение с опытными данными. В качестве примера исследуется свободное колебание композиционного стержня в поле центробежных сил.

Ключевые слова: композиционные материалы, стержень, колебания, частота.

Уравнения равновесия (3) [1] после подстановки в нее нагрузки от центробежных сил имеет вид (18) [1]

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega' \\ -v'' \\ v'' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $R_1 = -\rho F \ddot{w} - \rho \Omega^2 \omega F$, $R_2 = -\rho F(\ddot{v} - \ddot{\theta} \psi_\sigma) - \rho \Omega^2 I_\psi v_1' + P_\zeta v'$,

$R_3 = -\rho F(\ddot{v} + \ddot{\theta} \xi_\sigma) + \rho \Omega^2 F v - P_\zeta v'$, $R_4 = -\rho \ddot{\theta} I_\pi - \rho F(\ddot{v} \xi_\sigma - \ddot{v} \xi_\sigma) - \rho \Omega^2 \theta (I_\psi - I_\xi) - \theta' P_0$

$P_0 = \Omega^2 \int_z^l \rho(R+z)(I_y + I_x) dz$, u_1 – перемещения изгиба относительно оси x

[2]. Если не учитывать в системе координат ξ, η, ζ перемещения изгиба u_1 , то из (1) с учетом (5)-(8) [1] получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

После определения из системы (2) собственных чисел несимметричной вещественной матрицы находятся продольные, крутильные и изгибные собственные частоты слоистого стержня. После вычисления собственных векторов, соответствующих отдельному собственному числу матрицы (2), определяются формы колебания слоистого стержня по формуле (10) [1]. Если рассматривается стержень двусимметричного сечения при таких же условиях, то решается система уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & 0 & 0 & k'_{14} \\ 0 & (k'_{22} - \omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k'_{33} - \omega^2) & 0 \\ k'_{41} & 0 & 0 & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

При этом система (3) распадается на две независимые системы уравнений. Для крутильно-продольных колебаний система уравнений приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{14} \\ k'_{41} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

В этом случае система уравнений (4) определяет крутильно-продольные колебания многослойного анизотропного закрученного стержня двусимметричного сечения. Решения системы (4) совпадает с решением работы [2] в случае, если рассматривается свободное колебание стержня из однородного изотропного материала.

Уравнения для стержня, совершающего пространственные изгибные колебания, нагруженного силами инерции, для двусимметричного сечения в системе координат ξ, η, ζ ($I_{\xi\eta} = S_{\xi} = S_{\eta} = 0$) имеют вид

$$\begin{pmatrix} (k'_{22} - \omega^2) & 0 \\ 0 & (k'_{33} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Граничные условия при этом определяется из выражения [2] $\delta u \{M'_{\eta} - m_{\eta}\} \Big|_0^{\ell} = 0$, $\delta v \{M'_{\xi} - m_{\xi}\} \Big|_0^{\ell} = 0$, $\delta u' M_{\eta} \Big|_0^{\ell} = 0$, $\delta v' M_{\xi} \Big|_0^{\ell} = 0$, а начальные условия для функции $u(z, t)$, $v(z, t)$ будет $u(z, t_0) = u_0$, $v(z, t_0) = v_0$, $\dot{u}(z, t_0) = \dot{u}_0$, $\dot{v}(z, t_0) = \dot{v}_0$. При этом си-

система (1) распадается на две независимые системы уравнений. Собственные частоты колебаний в направлениях главных жесткостей определяется

из выражений $(\omega_\eta)_n = \sqrt{k'_{33}}$, $(\omega_\xi)_n = \sqrt{k'_{22}}$, где

$$k'_{33} = \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{33}}{\rho} - \Omega^2 + \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{P_z}{\rho}, \quad k'_{22} = \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{22}}{\rho} - \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{P_z}{\rho}.$$

Здесь $k_n = \frac{2n-1}{2}\pi$, $n = 1, 2, \dots$, $k_{22} = \sum_{i=1}^N \int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i$,

$$k_{33} = \sum_{i=1}^N \int_{F_i} \eta^2 c_1^i dF_i.$$

Если рассматривается свободное колебание слоистого закрученного анизотропного стержня, то собственные частоты определяются из выражений

$$(\omega_\eta)_n = \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{k_{33}}{\rho F}}, \quad (\omega_\xi)_n = \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{k_{22}}{\rho F}}. \quad (6)$$

Формулы (6) совпадают с выражением для круговых (Ω) и технических (f_n) частот свободных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{k_n^4}{\ell^4} \frac{I_1}{F\rho^i}; \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F}}, \quad \text{где величина } I_1 = \iint_F c_{33}^i \eta^2 dF.$$

В качестве примера определяются технические частоты стержня прямоугольного сечения, находящиеся в поле центробежных сил.

Результаты расчетов технических частот, найденные из решения системы уравнений (2) с расчетами по программе Ansys дают отличие в среднем 5%.

Литература

1. Нурымбетов, А. У. Колебание многослойного естественно-закрученного стержня из анизотропных материалов в поле центробежных сил / А. У. Нурымбетов, А. А. Дудченко // Вестник РУДН. Сер.: Инженерные исследования. – 2017. – Т. 18. – № 1. – С. 79-90.
2. Воробьев, Ю. С. Теория закрученных стержней / Ю. С. Воробьев, Б. Ф. Шорр. – Киев: Наук. думка, 1983. – 188 с.
3. Меерович, И. И. Колебания прямоугольной плоской пластины. – Динамика авиационных двигателей / И. И. Меерович. – М.: Оборонгиз, 1952. – Вып. 8. – С. 149-208.

Аманов А. Н., Ильина Д. А., Шлычков С. В.

Поволжский государственный технологический университет

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация. Представлена экспериментальная методика определения упругих и диссипативных свойств материалов. Результаты согласуются с известными данными.

Ключевые слова: модуль упругости, декремент колебаний, собственная частота.

Введение. Идентификация физико-механических свойств материалов может осуществляться разными методами [1]. Настоящее исследование ставит своей целью развитие вибрационного подхода. Он основан на выявлении первой собственной (резонансной) частоты образца (1, рис. 1) f_1 при возбуждении его колебаний посредством детерминированного электромагнитного сигнала с изменяющейся частотой. Для передачи электромагнитного воздействия на неметаллический образец

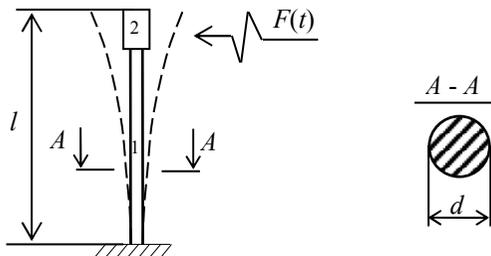


Рис. 1. Расчетная схема образца (1) с «колпачком» (2)

использован металлический колпачок массой 0,5 г. (2, рис. 1), плотно надетый на свободный конец образца. При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой про-

исходит возрастании амплитуды колебаний, которое фиксируется на

мониторе.

Эксперимент. Динамика. Известно аналитическое решение определения собственной частоты колебаний для такой механической системы (рис. 1), согласно которому модуль упругости определяется выражением [2]

$$E = \frac{f_1^2 \cdot l^3 \cdot (m + 0,24m_0l)}{3 \cdot I_z}$$

Здесь I_z – момент инерции поперечного сечения, m – масса колпачка, m_0 – погонная масса образца. С помощью данного соотношения были определены модули упругости для шести образцов, параметры которых представлены в табл. 1.

Таблица 1

	№ образцов					
	1	2	3	4	5	6
Материал	Древесина					Стекло
Масса [г]	0,72	0,88	1,08	0,93	0,91	6,47
Длина [мм]	150	150	152	150	200	165
Диаметр [мм]	33	31	31,5	33	25	42

Первые четыре образца выбраны подобными, а пятый и шестой отличны, как по типоразмерам, так и по материалам. Это сделано для проверки адекватности разрабатываемой методики. Результаты сведены в табл. 2.

Эксперимент. Статика. Для определения модуля упругости этих образцов был проведен ряд экспериментов по нахождению статического прогиба v (рис. 2). Образец устанавливался на опоры, к его середине подвешивался груз, прогиб фиксировался посредством индикатора часового типа.

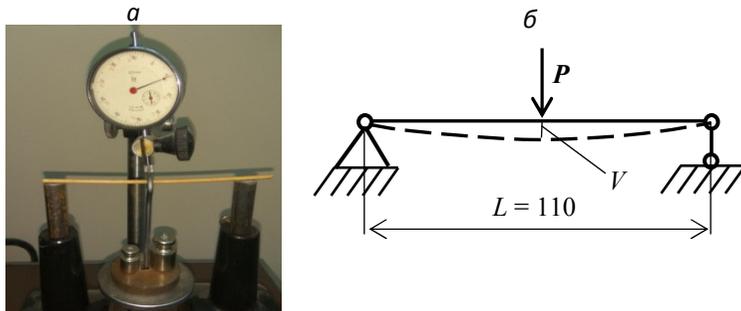


Рис. 2. Статический прогиб: *a* – натурный эксперимент, *б* – расчетная схема

На основании полученных линейных диаграмм зависимости прогиба от величины приложенной силы для каждого образца был определен модуль упругости. Известно, что статический прогиб шарнирно-опертой балки определяется выражением

$v = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot EI_z}$, следовательно модуль

упругости $E = \frac{P}{v} \frac{4 \cdot l^3}{3 \cdot \pi d^4}$. Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

Эксперимент. Диссипация. Для анализа характеристик рассеяния энергии колебаний для данных образцов были получены затухающие кривые, по которым определен декремент колебаний:

$$\Delta = \frac{1}{d}; d^{10} = \frac{A_{11}}{A_1}.$$

Здесь A_1 и A_{11} – это амплитудные значения затухающей гармонической кривой, взятые через 11 условных периодов. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2

	Модули упругости, ГПа					
	№ образцов					
	1	2	3	4	5	6
Статика	22	15,4	20,3	17,9	11,9	57,6
Динамика	17,2	15,6	23,9	16,9	10,8	50,7
Декремент	1,06	1,05	1,06	1,06	1,09	1,05

Вывод. На основании полученных данных можно констатировать: упругие характеристики материала можно достаточно точно определять с помощью разработанного прибора [3]. Имеются некоторые расхождения, в пределах инженерной точности, с результатами статического эксперимента. Это объясняется недостаточно качественной постановкой статических испытаний. При этом декременты колебаний получаются для различных материалов примерно одинаковыми, что означает отсутствие прямой зависимости между упругими и диссипативными свойствами.

Литература

1. Салдаева, Е. Ю. Идентификация упругих свойств древесины / Е. Ю. Салдаева, Е. М. Цветкова, С. В. Шлычков // *Фундаментальные исследования*. – 2013. – №10, часть 12. – С. 2625-2629. – Режим доступа: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10002109.
2. Светлицкий, В. А. Сборник задач по теории колебаний. Учебное пособие для вузов / В. А. Светлицкий, И. В. Стасенко. – М.: Высшая школа, 1973. – С. 156-157.
3. Шлычков, С. В. Методика оценки упруго-диссипативных характеристик материалов // *Сб. мат. Всерос. научн. конф. «Механика композиционных материалов и конструкций сложных и гетерогенных сред»*. Москва, 2015 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 311-313.

Ахметзянова Д. Р., Волкова М. Ю., Микакова Д. Е.,
Лоскутов Ю. В., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БАЛАНСА РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ РЕАБИЛИТАЦИОННОГО ЭКЗОСКЕЛЕТА МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

***Аннотация.** Рассмотрена задача обеспечения равновесия механической системы человек-экзоскелет для людей с нарушением работы опорно-двигательного аппарата. Рассмотрены различные варианты обеспечения равновесия. Для каждого из вариантов выявлены свои особенности, преимущества и недостатки. Дан обзор математических моделей, основанный на принципе равновесия неустойчивого перевёрнутого маятника с одним и двумя звеньями. Для различных способов реализации системы поддержки равновесия выделены основные критерии, за счет которых происходит поддержание баланса. На основе обзора источников представлены применяемые конструктивные решения и принципы реализации противодействия опрокидыванию системы человек-экзоскелет.*

***Ключевые слова:** экзоскелет медицинского назначения, локомоции человека, система управления экзоскелетом, устойчивость равновесия, поддержание баланса, двухзвенный перевёрнутый маятник.*

Роботизированные экзоскелеты могут улучшить повседневную жизнь большого количества людей, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата [1]. Применение таких экзоскелетов нижних конечностей, как ReWalk, Ekso, Indego позволило достигнуть значительного прогресса в восстановлении подвижности людей с травмой спинного мозга, после инсульта или имеющих мышечную слабость. При этом оценка риска и предотвращение падения во время передвижения системы человек-экзоскелет важны для контроля походки и безопасности оператора. Эти аспекты все еще не имеют системного подхода к решению. **Актуальность работы** обусловлена необходимостью решения проблемы стабильно устойчивого передвижения больного человека в экзоскелете. **Цель работы** – дать обзор методов и средств обеспечения устойчивости баланса системы человек-экзоскелет при ходьбе по горизонтальной поверхности, адаптируемых к различным параметрам местности и походки, к увеличенному диапазону скоростей и большей длине шага.

При разработке системы управления необходимо задать законы движения и устранить ненужные (лишние) движения. Экзоскелет должен включать соответствующие датчики и механизмы, реагирующие на

действия и положения тела в пространстве с учетом правильных локомоций и обеспечения устойчивости равновесия человека [2]. Разрабатываемые алгоритмы управления экзоскелетом должны быть способны «чувствовать» и «предсказывать» поведение человека, исключая рассинхронизацию действий, которая может привести к серьезным нарушениям здоровья.

В настоящее время сохранение баланса во время роботизированной походки остается сложной задачей. Пользователь часто полагается на дополнительные устройства для улучшения устойчивости. Например, было предусмотрено использование:

- мощного тяжелого экзоскелета, интегрированного с передвижной мобильной платформой для обеспечения равновесия во время ходьбы;
- подвесной системы на тросах, прилепленной к подвижной тали или системе Тредмил;
- помощи ассистентов, поддерживающих пациента в экзоскелете.

Последние два способа, обеспечивая большую мобильность пациента, все же далеки от идеальных решений. Ограничивается использование рук пользователем, ограничивается достижимая скорость ходьбы, требуется значительная сила рук и плечевого пояса во время ходьбы и стояния. Это утомляет пациента и ассистентов.

Недавно исследователи приступили к анализу стабильности баланса для людей, носящих экзоскелеты без костылей [3-5]. Предложена конструкция экзоскелета с гибридным приводом, в котором сочетание пневматических мышц и электродвигателей используется для обеспечения достаточного крутящего момента и управляемости, чтобы балансировать без костылей. В этих исследованиях анализ был сосредоточен только на роботизированной системе, исключая человеческий компонент. Предложена и апробирована для использования конструкция роботизированного экзоскелета с механизмом стабилизации баланса, что требует дальнейшего совершенствования для управления значительными сдвигами массы тела во фронтальной плоскости [3]. Разработаны методы контроля обеспечения активной походки в сагитальной и фронтальной плоскостях для экзоскелета MINDWALKER [4], а его устойчивая ходьба без костылей была продемонстрирована для здоровых людей.

Критерии устойчивости баланса человека и робота, основанные на концепции захвата и экстраполяции общего центра масс системы, использованы для автоматизированного контроля и восстановления равновесия против скользящих возмущений и толчков [3]. В этих исследованиях также были рассмотрены здоровые субъекты, обладающие чувством равновесия и подвижностью.

Был предложен гибридный регулятор нулевой динамики для автоматизированной походки. Нижняя часть тела человека и экзоскелет рассматривались как сосредоточенное твердое тело при отсутствии возмущений от движения ног [4]. Там же предложена усовершенствованная модель экзоскелета, которая обеспечивала равновесие путем добавления в каждом суставе пружинно-масс-демпферных систем с параметрами, полученными путем оптимизации на основе данных экспериментов.

Выводы

Таким образом, в работе приведен обзор методов и средств обеспечения устойчивости баланса системы человек-экзоскелет при ходьбе по горизонтальной поверхности. Выявлено, что не существует общеприменимых и всеобъемлющих методов анализа устойчивости баланса движения с помощью роботизированных экзоскелетов. Трудность частично возникает из-за проблем определения балансировки против падения в целом для шагающих систем, сложности моделирования привода и многообразия динамики комбинированной системы пациент-экзоскелет, обладающей неуравновешенной массой и переменным центром масс.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»)), шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление / В. Е. Павловский [и др.] // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2014. – № 111. – 19 с.
2. Yury Loskutov, et al. Synthesis of exoskeleton control algorithms based on kinematic analysis of locomotions and human gait modeling // Journal of Applied Engineering Science. 2018 – Vol. 16, No. 4, P. 583-591. DOI:10.5937/jaes16-17230.
3. Изучение управляемого движения экзоскелета во фронтальной плоскости в режиме восстановления равновесия / С. Ф. Яцун, С. И. Савин, А. С. Яцун и др. // Экстремальная робототехника. – 2016. – Т. 1. № -1. – С. 236-245.
4. G. Barbareschi, R. Richards, C. Holloway, T. Carlson, M. Thornton. Statically vs dynamically balanced gait: Analysis of a robotic exoskeleton compared with a human // 37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBS), August 2015, 2015. – 4 p.
5. Способы поддержания устойчивого положения реабилитационного экзоскелета медицинского назначения при ходьбе / А. В. Капустин, Ю. В. Лоскутов, И. А. Кудрявцев и др. // Вестник Поволжского гос. технол. ун-та. Сер.: Материалы. Конструкции. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 44-54.

Булдакова Ю. М., Кудрявцев С. Г.

Поволжский государственный технологический университет

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ОСЕЙ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ПОКРЫТИЯ

Аннотация. Приведены результаты исследования влияния направления осей анизотропии материала на напряженное состояние в двухслойной полосе, лежащей на жестком основании, под действием статической поверхностной нагрузки. Рассматривается вариант полного сцепления между слоями.

Ключевые слова: анизотропия, напряжения, полоса, упругость.

Полоса, составленная из двух анизотропных плоскопараллельных слоев с разными физическими и геометрическими параметрами, лежит на жестком основании (рис. 1). Перемещения, напряжения, упругие и геометрические характеристики каждого слоя обозначены нижним индексом k ($k=1,2$). Нумерация слоев выбрана снизу. Положительные направления напряжений и перемещений показаны на рисунке. Статическая нагрузка прикладывается к верхней плоскости полосы. Рассматривается вариант полного сцепления между слоями.

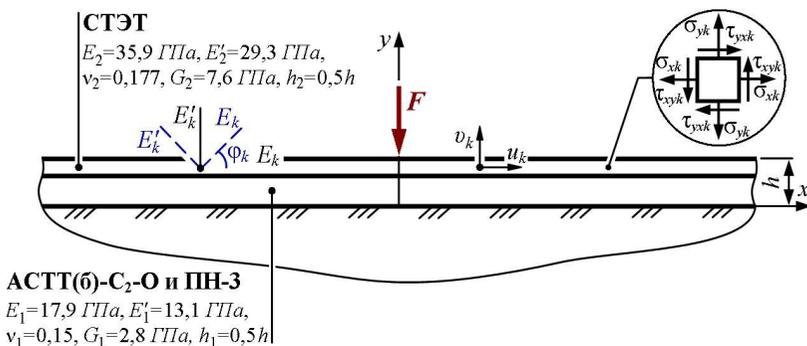


Рис. 1. Расчетная схема задачи

При определении напряженного и деформированного состояния системы исходим из уравнений [1]. Функции перемещений и напряжений в каждом слое полосы, учитывая граничные условия задачи, а также

используя интегральное преобразование Фурье [2], записываются в виде несобственных интегралов через поверхностную нагрузку.

Покажем влияние направления осей анизотропии материала в каждом слое на напряженное состояние двухслойного покрытия. С этой целью выразим коэффициенты деформации, используя формулы преобразования упругих постоянных при повороте осей анизотропии на некоторый угол φ_k [3], через технические постоянные.

Численные результаты расчетов представлены для случая, когда на верхней плоскости в сечении $x = 0$ действует сила интенсивностью $(-F)$, перпендикулярно границе двухслойной полосы, равномерно распределенная вдоль оси перпендикулярной плоскости рис. 1. Верхний слой полосы выполнен из тканевого стеклопластика горячего прессования (СТЭТ), нижний – стеклопластика на основе стеклоткани марки АСТТ(б)-С2-О и полиэфирной смолы марки ПН-3 [3]. Значения физических и геометрических характеристик слоев приведены на рис. 1.

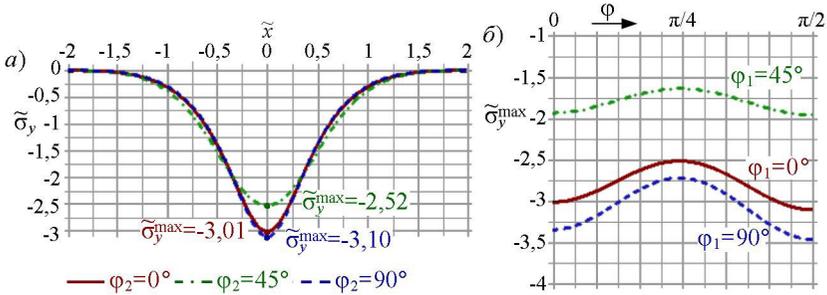


Рис. 2. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ в полосе на линии контакта с основанием

a – при $\varphi_1 = 0$; б – значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от φ_k

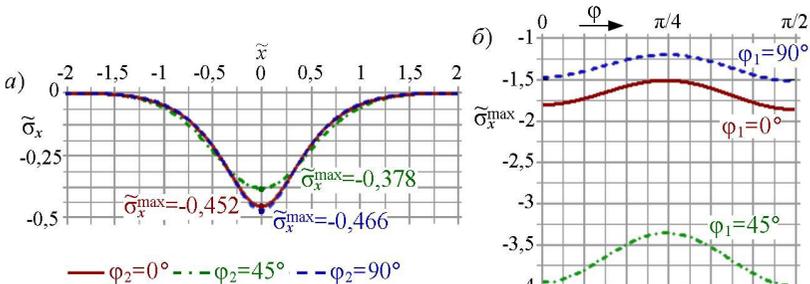


Рис. 3. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ в полосе на линии контакта с основанием

a – при $\varphi_1 = 0$; б – значения $\tilde{\sigma}_x^{\max}$ в зависимости от φ_k

Графики построены для обобщенного плоского напряженного состояния в безразмерных параметрах

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \pi h}{F}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{F}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{F}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h} = \frac{\bar{x}}{h}.$$

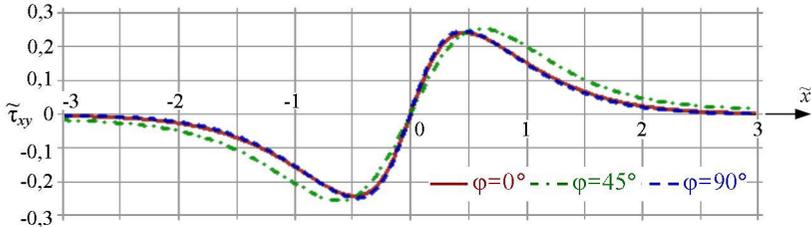


Рис. 4. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ на линии контакта полосы и полуплоскости

Максимальные значения параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ в зависимости от направлений углов φ_k приведены в таблице.

Значения параметра $|\tilde{\tau}_{xy}^{\max}|$ в зависимости от φ_k

$\varphi_1 \backslash \varphi_2$	0°	30°	45°	60°	90°
0°	0,240	0,248	0,253	0,250	0,246
30°	0,732	0,728	0,733	0,736	0,754
45°	0,917	0,907	0,911	0,917	0,946
60°	0,720	0,717	0,723	0,725	0,743
90°	0,229	0,242	0,248	0,243	0,236

Из сравнения графиков и данных таблицы видно, что направление осей анизотропии материала в слоях двухслойного покрытия оказывает влияние на характер напряженного состояния.

Литература

1. Кудрявцев, С. Г. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания / С. Г. Кудрявцев, Ю. М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №4. – С. 29-35.
2. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 368 с.
3. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Бураков В. А., Журавлев Е. А., канд. техн. наук, доцент
 Поволжский государственный технологический университет

ДИНАМИКА ТОЧКИ НА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Аннотация. Рассматривается математическая модель движения точки по неподвижной гладкой плоской кривой под действием заданной силы с учетом Кулоновского трения. Выполнен вывод уравнения динамики точки и численная реализация модели в пакете Mathcad.

Ключевые слова: динамика несвободной точки, координатное задание траектории, плоская кривая, Кулоновское трение, численное решение.

Во всех популярных руководствах по теоретической механике [1]-[3] для описания динамического поведения точки при её движении по заданной неподвижной плоской кривой рекомендуется использовать уравнения Эйлера, полученные проецированием основного закона динамики на естественные оси – касательную и нормаль n :

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m\dot{s}^2/\rho = F_n + N, \quad (1)$$

где F – заданная сила, N – неизвестная реакция кривой (полагается $N = 0$), s – дуговая координата – основная переменная описывающая состояние точки.

Для решения системы (1) требуется представить F , F_n , как функции дуговой координаты s , но для любой кривой, кроме окружности, эти функции затруднительно или невозможно выразить в конечном виде. Кроме того, в прикладных задачах плоскую кривую задают координатными уравнениями вида $y = f(x)$, или $F(x, y) = 0$, или $x = (p)$, $y = \psi(p)$, а внутреннее описание кривой s) не используется.

Чтобы преодолеть эти трудности, можно заменить переменную s в (1), используя, например, явное уравнение траектории $y = f(x)$. В результате получим уравнение динамики вида $\ddot{x} = \Phi(\dot{x}, f'(x), f''(x), \mathbf{F})$ и выражение нормальной реакции $N = \varphi(\dot{x}, f'(x), f''(x), \mathbf{F})$, где штрихи означают дифференцирование по x , а точки – по времени.

Другой более «механический» способ получения этих же соотношений представлен в данной работе.

Пусть материальная точка массой m движется по плоской кривой заданной уравнением $y = f(x)$ под действием заданной силы $\mathbf{F}(F_x, F_y)$, учитывается также сила Кулоновского трения.

Проецируя векторное уравнение динамики $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{mp}$ на неподвижные Декартовы оси OX и OY получаем (рис. 1):

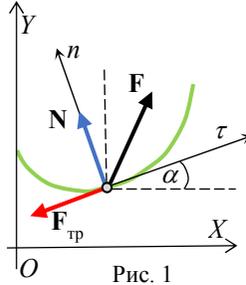


Рис. 1

$$m\ddot{x} = F_x - N \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} - F_{mp} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = F_y + N \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} - F_{mp} \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad (3)$$

где $f'/\sqrt{1+f'^2} = \sin \alpha$, $1/\sqrt{1+f'^2} = \cos \alpha$.

Дважды дифференцируя равенство $y = f(x)$, получаем соотношение

$$\ddot{y} = \dot{x}^2 f'' + \ddot{x} f', \quad (4)$$

которое можно использовать для исключения \ddot{y} из уравнения (3).

Если умножить (2) на $(-f')$ и сложить почленно с (3), исключив \ddot{y} при помощи (4), то получим для нормальной реакции и силы трения:

$$N = \frac{mf''\dot{x}^2 + f'F_x - F_y}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad F_{mp} = \mu \frac{mf''\dot{x}^2 + f'F_x - F_y}{\sqrt{1+f'^2}} \text{sign}(\dot{x}). \quad (5)$$

Аналогичным образом, умножив (3) на f' и сложив с (2), после исключения \ddot{y} и F_{tr} при помощи (4) и (5), получим дифференциальное уравнение для $x(t)$:

$$\ddot{x} = \frac{F_x + f'(F_y - mf''\dot{x}^2) + \mu[F_y - f'(F_x + mf''\dot{x}^2)]\text{sign}(\dot{x})}{m(1+f'^2)}. \quad (6)$$

Соответствующие начальные условия имеют вид:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0/\sqrt{1+f'^2(x_0)}. \quad (7)$$

В качестве примера использования математической модели (6), (7) был выполнен расчет движения материальной точки по шероховатой

кривой, расположенной в вертикальной плоскости (рис. 2). Кривая – синусоида с амплитудой 0,03 м и периодом 2/3 м, ось которой образует с горизонтом угол $\alpha = 0,1$ рад. Уравнение кривой в осях OX, OY : $y = 0,03 \sin(3x)$ (x, y – в м).

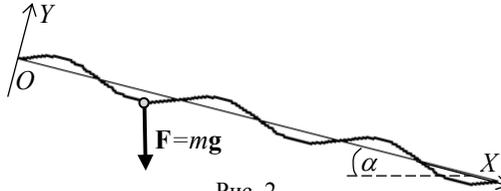


Рис. 2

Проекции силы тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ точки на эти же оси: $F_x = mg \sin \alpha$, $F_y = -mg \cos \alpha$. Коэффициент трения $\mu = 0,3$. Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2,4$ м/с.

Нелинейное дифференциальное уравнение (6) решалось численным методом Рунге-Кутты с постоянным шагом $t = 0,015$ с при помощи стандартной процедуры **rkfixed** пакета Mathcad 7.0. Результаты расчетов представлены на рис. 3. Кривая 1 изображает саму синусоидальную траекторию точки, кривые 2 и 3

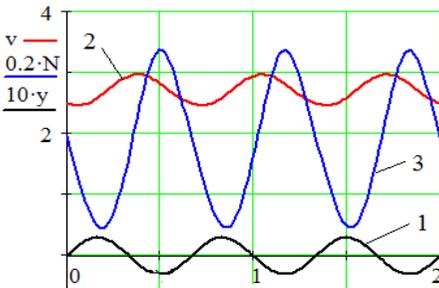


Рис. 3

показывают изменение скорости точки и нормальной реакции N соответственно. Горизонтальная ось всех графиков соответствует координате x (рис. 2), единицы измерения всех представленных величин соответствуют СИ.

Как видно из графиков, движение точки безотрывное ($N > 0$) и стационарное – наибольшее и наименьшее значения скорости точки практически не изменяются.

Литература

1. Аппель, П. Теоретическая механика. Т. 1. – М.: Физматлит, 1960. – 515 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
3. Курс теоретической механики / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др. – М.: изд-во МГТУ, 2005. – 736 с.

Васильев В. Р.

Научный руководитель: Шестаков Я. И., канд. техн. наук, профессор
Поволжский государственный технологический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК В ШАРНИРАХ МАНИПУЛЯТОРА

***Аннотация.** Определена зависимость значения нагрузок в шарнирах манипулятора от массы поднимаемого груза.*

***Ключевые слова:** манипулятор, шарнир, реакция.*

Постановка проблемы. Гидравлические манипуляторы стали применять широко в России в 2000 годы. На данный момент они и сейчас востребованы на рынке. В России применяются как манипуляторы отечественного производства, так и иностранного. Продаются как новые, так и бывшие в употреблении манипуляторы, б/ушные чаще всего привозят из Японии. Отечественные манипуляторы, в основном, спроектированы на грузовой момент в пределах 50-125 кН*м, небольшая часть – больше 300 кН*м. У иностранных манипуляторов у большинства 25-250 кН*м, у 19% – больше 300 кН*м, у специализированных – больше 1000 кН*м. [1].

Самой нагруженной частью манипуляторов являются места соединения шарниров, в них действуют всевозможные нагрузки – переменные и постоянные нагрузки, крутящие моменты, вес элементов манипулятора. Вследствие чего, в таких местах образуются усталостные трещины.

В этой связи необходимо правильно определять нагрузки в шарнирах соединения элементов манипулятора, чтобы правильно спроектировать места соединений. Благодаря этому можно точно оценить нагрузки в шарнирах, что позволит решить проблему уменьшения отрицательно влияния динамических нагрузок на узел манипулятора.

Цель работы: определение зависимости значения нагрузок в шарнирах манипулятора от массы поднимаемого груза.

Анализ результатов. Основной причиной разрушения проушин является малая контактная площадь проушины и шарнира, из-за этого увеличивается скорость разрушения, увеличивается посадочный диаметр шарнира, что является одной из самых распространенных дефектов в манипуляторах. В среднем наработка данного места равняется 2-3

тысячам моточасов, а наработка всей конструкции манипулятора может доходить до 12 тысяч моточасов.

Поэтому при проверке технического состояния манипуляторов необходимо проверять данные посадочные места, отклонение размера отверстия регламентируется, согласно требованиям Ростехнадзора – люфт не может быть больше 2 мм при диаметре 50 мм, 3 мм при диаметре 50-100 мм, и 4 мм – при больше 100 мм. [1].

Для определения реакции в шарнирах манипулятора применяют стандартную методику, расчет ведут для двух опасных случаев:

- 1 – при максимальном вылете манипулятора;
- 2 – при минимальном вылете манипулятора.

Реакции на шарнирах определяют с учетом разных положений манипулятора. Для этого составляют схему нагружения манипулятора с учетом вылета. Направления сил определяются по расположению на компоновочно-кинематической схеме с учетом положения рукояти относительно шарниров. При решении этих уравнений можно определить реакции связей в узлах сочленения элементов манипулятора: в месте соединения захватного устройства и рукояти, рукояти и стрелы, стрелы и корпуса.

Для нахождения реакции связей в узлах сочленения элементов манипулятора необходимо рассматривать шарнирно-сочлененную систему тел, на которую воздействуют все силы. С учетом этого составляют уравнения на оси координат. [2].

Приведем формулы, по которым будет производиться расчет нагрузок для манипулятора Атлант-С 90-08.

При максимальном вылете манипулятора усилия в шарнире соединения стрелы и рукояти:

$$P_p^1 = P_p \cos 28 / \cos 53. \quad (1)$$

$$R_x' = P_p^1 \cos 19. \quad (2)$$

$$R_y' = G_p + (G_\delta + G_{зcy}) - P_p^1 \cos 71. \quad (3)$$

P_p – усилие в гидроцилиндре для поворота рукояти;

$G_p, G_\delta, G_{зcy}$ – вес рукояти, груза, захватного устройства, соответственно.

Общая реакция равна:

$$R = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2}. \quad (4)$$

С учетом полученных формул определена зависимость реакции в шарнире места соединения рукоятки стрелы и рукоятки, показанная на рисунке.

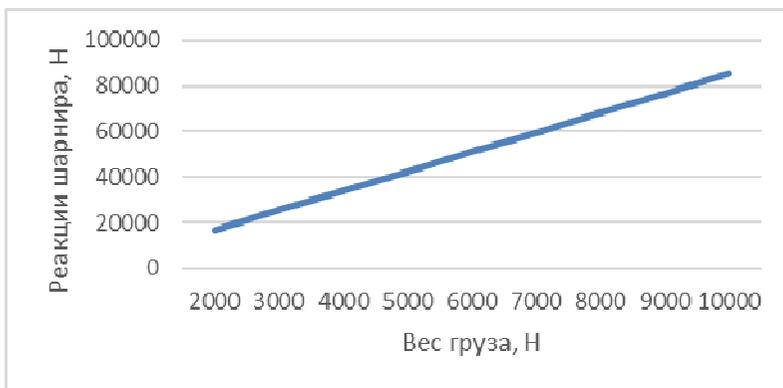


График зависимости

Выводы. Определена зависимость усилия в шарнире соединения рукоятки и стрелы манипулятора, для увеличения ресурса работы манипуляторов необходимо уменьшать отрицательное влияние динамических нагрузок на шарниры манипулятора.

Литература

1. Петренко, А. М. Грузовые манипуляторы специальных транспортных средств [Текст] / А. М. Петренко, А. Т. Звекон. – М.: МАДИ(ГТУ), 2009. – 90 с.
2. Александров, В. А. Основы проектирования лесозаготовительных машин и оборудования [Текст]: учеб. пособие / В. А. Александров. – Ухта: УГТУ, 2007. – 283 с.

Вязов А. Е., Капустин А. В.

Поволжский государственный технологический университет

АНАЛИЗ СООТВЕТСТВИЯ ПОТРЕБЛЯЕМОГО ТОКА И КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА В ПРИВОДЕ ДЕТСКОГО ЭКЗОСКЕЛЕТА МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

***Аннотация.** В ходе проведения ресурсных испытаний детского экзоскелета медицинского назначения были получены токовые характеристики 4-х приводов. В работе произведено сравнение полученных токов с моментами, которые возникают в кинематических парах приводов.*

***Ключевые слова.** экзоскелет, детский экзоскелет, ресурсные испытания экзоскелета, токи BLCD приводов, энергосиловые характеристики экзоскелета.*

Актуальность работы заключается в необходимости проведения ресурсных испытаний детского экзоскелета медицинского назначения. На данном этапе необходимо сопоставить токовую нагрузку электродвигателей и расчетные крутящие моменты, которые должны возникать в тазобедренном и коленном сочленении экзоскелета.

Целью исследования является сопоставление токовых характеристик приводов экзоскелета с проектными. На основании сравнения можно будет сделать выводы о правильности работы и надёжности приводов.

Теория. Электрическая схема управления экзоскелетом и описание законов движения представлены в работе [1].

Эмпирические функции изменения углов от времени t тазобедренного α и коленного суставов β равны:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5915,1 \cdot t^6 - 14483 \cdot t^5 + 11532 \cdot t^4 - 2992,6 \cdot t^3 + 117,38 \cdot t^2 - 78,151 \cdot t + 17,399, \\ \alpha_2 &= 14,585 \cdot t^6 + 1286,9 \cdot t^5 - 3148,2 \cdot t^4 + 3020 \cdot t^3 - 1547,7 \cdot t^2 + 381,35 \cdot t - 10,224, \\ \beta_1 &= 8904,1 \cdot t^6 - 31042 \cdot t^5 + 38856 \cdot t^4 - 21225 \cdot t^3 + 4992,3 \cdot t^2 - 504,78 \cdot t + 9,8932, \\ \beta_2 &= 10306 \cdot t^6 - 30959 \cdot t^5 + 34613 \cdot t^4 - 17132 \cdot t^3 + 3013,6 \cdot t^2 + 165,44 \cdot t - 55,019.\end{aligned}$$

Силовые и моментные нагрузки в приводах экзоскелета будем считать пропорциональными токовой нагрузке в приводах экзоскелета. Для обобщения энергосиловых характеристик можно представлять их в удельном виде, на килограмм веса. Ранее измеренные подобные характеристики были взяты у Winter David A. [2].

Эксперимент. В результате испытаний была измерена токовая нагрузка на приводы экзоскелета (рис. 1).

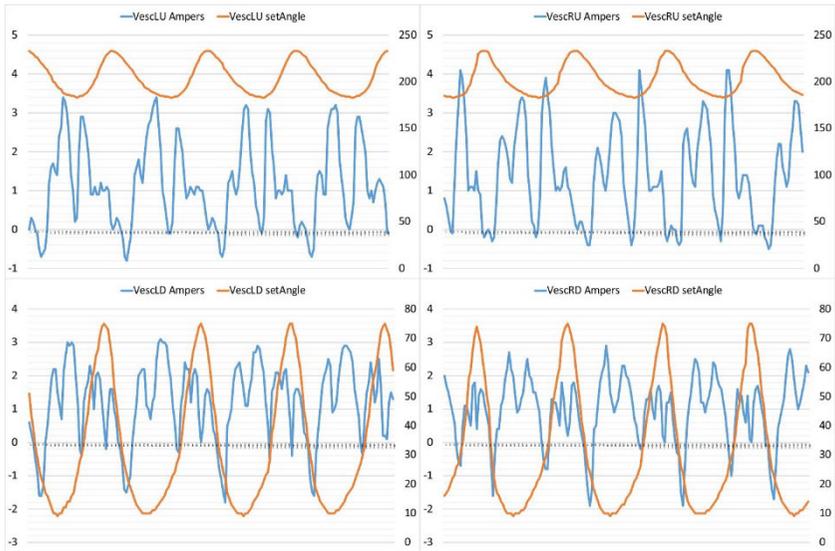


Рис. 1. Графики изменения тока в приводах и графики изменения углов за четыре цикла шага (LU – левый верхний; RU – правый верхний; LD – левый нижний; RD – правый нижний)

На графике видно, что токовая нагрузка имеет значительные колебания. Это связано с колебаниями ноги экзоскелета, а также переходными процессами между касанием и отрывом ноги (педипулятора) от поверхности. Также колебания тока можно объяснить собственными колебаниями системы.

Сопоставим графики тока с графиком изменения момента в суставах человека, полученным по Винтеру (рис. 2). Переведём удельный ток тазобедренного и коленного сустава в значения крутящего момента. При этом воспользуемся коэффициентом прямой пропорциональности.

На графике токовая кривая повторяет кривую моментов лишь отчасти. Как было сказано выше, это объясняется колебательными процессами. Если сгладить кривую токов, то совпадение будет в пределах допустимого.

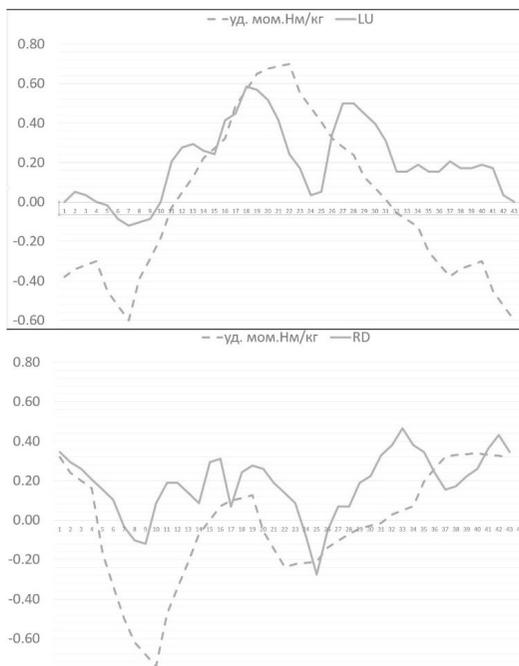


Рис. 2. Сопоставление графиков удельного тока и удельного момента по Винтеру

Вывод. При анализе крутящего момента в приводах экзоскелета можно пользоваться токовыми изменениями в BLCD электродвигателях, исключив при этом колебательные составляющие.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»», шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Loskutov Y., Kapustin A., Kudryavtsev A., Nasibullin A., Lebedeva A. / Synthesis of exoskeleton control algorithms based on kinematic analysis of locomotions and human gait modelling // Journal of Applied Engineering Science 2018, Vol 16., Art 586, Pages 583-591. DOI: 110.5937/jaes16-17230.
2. Winter, David A., Biomechanics and motor control of human movement / David A. Winter. – JOHN WILEY & SONS, INC., 2009 – 370 p. ISBN 978-0-470-39818-0 (cloth).

Куликов Ю. А., Михеева П. К., Соколова Ю. А.
 Поволжский государственный технологический университет

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ РАСЧЁТА ДЕРЕВЯННЫХ БАЛОК, УСИЛЕННЫХ УГЛЕРОДНЫМИ ЛЕНТАМИ

Аннотация. Представлена методика расчёта на прочность и жёсткость деревянных балок, усиленных однонаправленными углеродными лентами. Результаты расчёта сопоставлены с данными экспериментов. Установлено, что внешнее армирование увеличивает жёсткость балок на изгиб в 1,5 раза, прочность – в 1,5...1,6 раза.

Ключевые слова: балка из древесины, углеродная лента, прочность и жёсткость при изгибе.

Одной из современных технологий усиления элементов конструкций является технология внешнего армирования. Рассмотрим влияние армирования растянутых слоёв деревянных балок однонаправленной углеродной лентой *FibFrm Tape – 430/150* на их прочность и жёсткость.

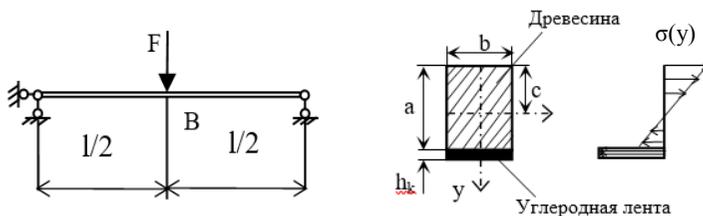


Рис. 1

Обозначим E_K и σ_{sp}^K – модуль упругости и предел прочности композита на растяжение вдоль волокон; E_D и σ_e^D – модуль упругости и предел прочности при изгибе древесины.

Для балки, усиленной углеродной лентой (рисунок), выразим напряжения в композите и древесине. На основании решения [1], гипотезы плоских сечений и закона Гука запишем

$$\sigma_K = \frac{E_K}{\rho}(a - c) \quad \text{и} \quad \sigma_D = \frac{E_D}{\rho}y, \quad (1)$$

где $-c \leq y \leq a - c$ – координата, ρ – радиус кривизны осевой линии. Нормальные напряжения в углеродной ленте считаются постоянными, в древесине – изменяются по линейному закону.

Используя выражения (1), запишем уравнение равновесия элемента длиной dx в условиях чистого изгиба.

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad \frac{E_K A_K}{\rho} (a - c) + \frac{E_D}{\rho} \int_{A_D} y dA_D = 0, \\ \sum M_Z = 0: & \quad \frac{E_K A_K}{\rho} (a - c)^2 + \frac{E_D}{\rho} \int_{A_D} y^2 dA_D = M_Z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $A_D = ab$ и $A_K = bh_K$ – площади поперечных сечений древесины и композита (h_K – толщина ленты).

Статический момент и осевой момент инерции площади $A_D = ab$ относительно нейтральной оси z равны:

$$S_Z = \int_{A_D} y dA_D = ab \left(\frac{a}{2} - c \right) \quad \text{и} \quad I_Z = \int_{A_D} y^2 dA_D = \frac{ba^3}{12} + \left(c - \frac{a}{2} \right)^2 ab. \quad (3)$$

С учётом подстановки (3) из первого уравнения (2) определяем положение нейтральной оси:

$$c = \frac{a(mh_K + a/2)}{mh_K + a}. \quad (4)$$

Здесь $m = E_K/E_D$ – параметр. При $h_K = 0$ получим $c = a/2$.

В свою очередь, с учётом (3) из второго уравнения (2) находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_Z}{E_D B_Z}, \quad B_Z = I_Z + mbh_K (a - c)^2. \quad (5)$$

Здесь $E_D B_Z$ – жёсткость поперечного сечения балки, усиленной углеродной лентой, на изгиб; B_Z – приведённый момент инерции составного сечения. Заметим, что при $h_K = 0$ имеем $B_Z = I_Z = ba^3/12$. Очевидно, чем больше m и h_K , тем больше изгибная жёсткость.

Используя формулы (1), с учётом (5) находим значения максимальных нормальных напряжений в композите и древесине:

$$\sigma_K = \frac{M_Z^{\max}}{B_Z} m (a - c) \quad \text{и} \quad \sigma_D^{\max} = \frac{M_Z^{\max}}{B_Z} c. \quad (6)$$

Вычислим линейное перемещение δ_B шарнирно-опёртой балки, нагруженной сосредоточенной силой (рисунок). Для этого воспользуемся интегралами Максвелла-Мора. С учётом симметрии запишем

$$\delta_B = \frac{2}{E_d B_Z} \int_0^{l/2} M_Z \bar{M}_Z dx = \frac{2}{E_d B_Z} \int_0^{l/2} \left(\frac{F}{2} x \right) \left(\frac{1}{2} x \right) dx = \frac{F l^3}{48 E_d B_Z}. \quad (7)$$

На рис. 2 представлены расчётные характеристики балки с усилением (1) и без усиления (2) при $a=8$ мм; $b=30$ мм; $l=500$ мм; $h_K=0,128$ мм, $E_K=240$ МПа, $\sigma_{sp}^K=4900$ МПа (ТУ 1916-005-61664530-201); $E_d=14,5$ МПа, $\sigma_6^d=79,3$ МПа (сосна при 15 % влажности [2]). Точками обозначены данные эксперимента (использовались индикаторы часового типа). Сравнивая (1) и (2), констатируем, что внешнее армирование увеличивает жёсткость балки на изгиб в 1,5 раза. Результаты расчёта подтверждаются данными эксперимента.

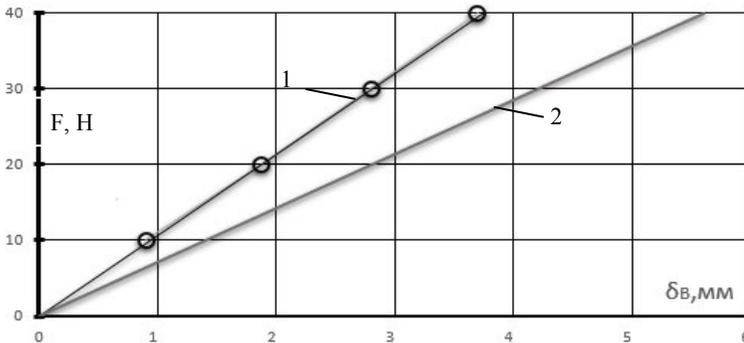


Рис. 2

С целью сравнительной оценки прочности балок с усилением и без усиления определяем разрушающие нагрузки. Для балок без усиления: $F_p=260$ и 290 Н, для балок с усилением: $F_p=420$ и 440 Н. Таким образом, внешнее армирование увеличивает прочность балок на изгиб в 1,5...1,6 раза.

Литература

1. Куликов, Ю. А. Соппротивление материалов. Курс лекций. – СПб.: Изд-во «Лань», 2017. – 272 с.
2. Филин, А. П. Прикладная механика твёрдого деформированного тела. Т. 1. – М.: Изд-во «Наука», 1975. – 832 с.

Лагереv И. А., Химич А. В.
Брянский государственный университет
имени академика И. Г. Петровского

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРОПРИВОДЕ СТРЕЛЫ КРАНА-МАНИПУЛЯТОРА

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель и методика моделирования рабочих процессов в гидроприводе крана-манипулятора при раздельном движении звеньев стрелы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-10274).

Ключевые слова: кран-манипулятор, гидропривод, дроссельное регулирование, рабочий процесс, динамика, моделирование.

Краны-манипуляторы, установленные на автомобильные шасси, активно применяются для механизации грузоподъемных работ. Как правило, звенья их стрел приводятся в движение гидроприводом [1-3].

Математическая модель дроссельно-регулируемого гидропривода крана-манипулятора при раздельном движении звеньев базируется на структурно-функциональной схеме, предложенной в [4]. Указанная схема с обозначением характерных точек по длине гидросистемы, в которых производится определение количественных параметров, определяющих протекание рабочих процессов в гидроприводе при работе крана-манипулятора, приведена на рис. 1.

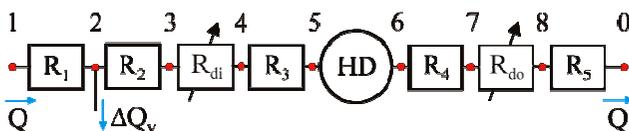


Рис. 1. Типовая структурно-функциональная схема дроссельно-регулируемого гидропривода с гидроцилиндром HD крана-манипулятора при раздельном движении звеньев [4]

В характерных точках определяются величина давления p_j ($j=1\dots 8$) и объемного расхода рабочей жидкости Q_j ($j=0\dots 8$). В точке 2 дополнительно определяется величина объемного расхода рабочей жидкости через предохранительный клапан ΔQ_v . Также на характерных участках гидросистемы, ограниченных соседними характерными точками, определяется величина потери давления $R_1\dots R_5$.

На рис. 2 показано исследуемое движение звеньев стрелы крана-манипулятора машины АСТ-4-А, которое сопровождается соответственным изменением характеристик нагружения (рис. 3). При изменении конфигурации стрелы сначала движется звено 1, потом звено 2 (рис. 2).

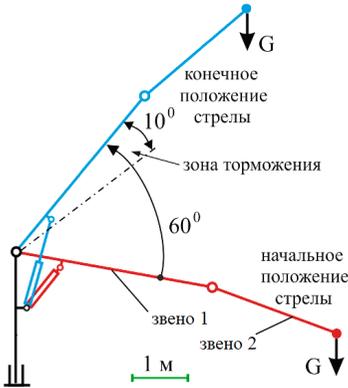


Рис. 2. Крайние конфигурации гидравлического крана-манипулятора машины АСТ-4-А при раздельном движении звеньев стрелы с грузом весом G

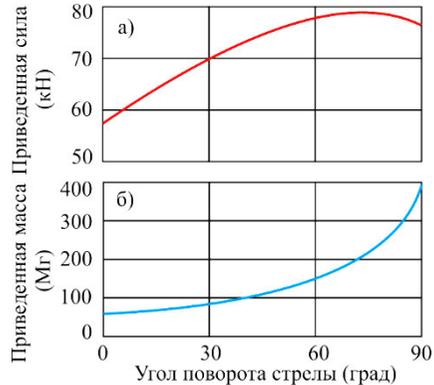


Рис. 3. Изменение в зависимости от угла поворота стрелы приведенных к штоку гидроцилиндра параметров нагружения: а – эксплуатационной силы; б – перемещаемой массы

Результаты моделирования рабочих процессов в гидроприводе крана-манипулятора показаны на рис. 4.

Период разгона стрелы как при подъеме, так и при опускании характеризуется протеканием в гидросистеме нестационарных процессов, связанных с неустановившимся характером изменения гидравлических параметров – давлений и расходов рабочей жидкости. В этот период происходит снижение величины давления в напорной части гидросистемы. Одновременно наблюдается повышение подачи насоса. На стадии разгона постоянно открыт напорный предохранительный клапан, обеспечивающий пропуск лишнего расхода рабочей жидкости в гидробак.

Период установившегося движения стрелы крана-манипулятора характеризуется протеканием стационарных гидравлических рабочих процессов в гидроприводе. Это обусловлено постоянством подачи насоса, равной номинальному значению. Также имеют постоянное значение перепады давлений на гидроцилиндре и регулируемых дросселях. Предохранительный клапан на данной стадии движения стрелы закрыт и объемный расход сбрасываемой рабочей жидкости равен нулю.

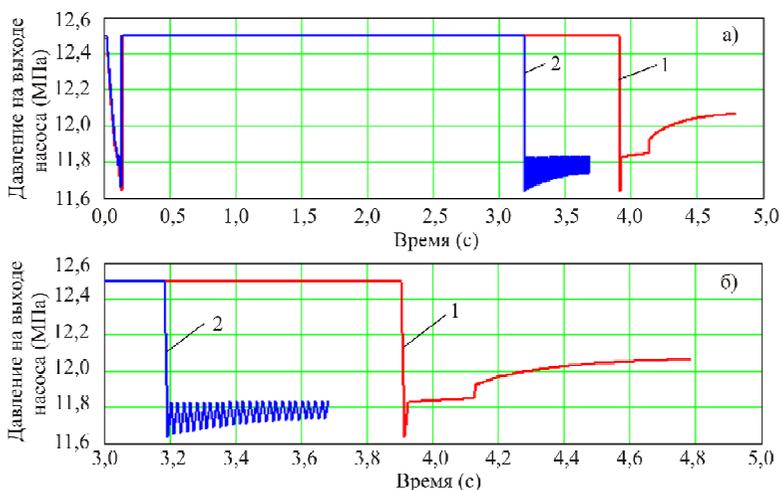


Рис. 4. Изменение величины давления рабочей жидкости на выходе насоса во времени (точка 1): а – полное время движения; б – интервал времени движения 3...5 с (1 – подъем; 2 – опускание)

Наибольшей нестационарностью характеризуются гидравлические рабочие процессы, протекающие в гидроприводе на стадии торможения стрелы крана-манипулятора. Обращает на себя внимание колебательный характер изменения во времени гидравлических параметров при опускании стрелы, который при ее подъеме не наблюдается.

Литература

1. Бандурин, Р. А. Рынок кранов-манипуляторов в России / Р. А. Бандурин // Проблемы современной экономики. – 2015. – №26. – С. 138-142.
2. Лагерев, А. В. Модернизация крана-манипулятора самоходной энергетической машины АСТ-4-А / А. В. Лагерев, И. А. Лагерев, В. В. Говоров // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2010. – №4. – С. 59-66.
3. Лагерев, И. А. Динамическая нагруженность крана-манипулятора машины для сварки трубопроводов при движении с грузом / И. А. Лагерев // Подъемно-транспортное дело. – 2011. – №3. – С. 7-10.
4. Лагерев, А. В. Моделирование рабочих процессов в дроссельно-регулируемом гидроприводе манипуляционных систем мобильных машин при раздельном движении звеньев / А. В. Лагерев, И. А. Лагерев // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2018. – №4. – С. 355-379.

Лаптев С. Н., Осипов В. И.

Научный руководитель: Осипов В. И., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

К ОЦЕНКЕ КОНСТРУКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА В ПЛАНЕТАРНОМ РЕДУКТОРЕ

Аннотация. *Представлены способы крепления водила планетарного редуктора на валу: сварное соединение, шпоночное, шлицевое, соединение коническими кольцами. Рассмотрены достоинства и недостатки каждого способа. Подбор предпочтительного варианта установки водила.*

Ключевые слова: *планетарный редуктор, водило, упругие конические кольца, сварка, подбор числа конических колец.*

Изучение подходов к конструированию многофункциональных соединений деталей машин представляет для студента повышенные трудности в связи с недостаточным количеством примеров таких решений в профильной учебной литературе [1,2] и отсутствием сопоставительных оценок. Это сдерживает применение современных, прогрессивных средств, побуждая обходиться традиционными и, часто, шаблонными решениями. Ниже рассматривается один из вариантов разрешения этого противоречия на примере планетарного редуктора. Задача заключается в выборе способа установки водила 1 (рис. 1) на тихоходный вал 2 (рис. 1) планетарного редуктора.

Планетарная передача является передачей с избыточными связями, для снижения влияния которых на распределение нагрузки в зацеплениях важно обеспечить точное центрирование водила на валу. Существующие традиционные способы соединения водила с валом: сварка, посадка с натягом, шпоночное и шлицевое соединение – не всегда удовлетворяют этому условию.

При использовании соединения сваркой наиболее важным представляется то, что способ достаточно технологичен, но имеет ряд недостатков. Во-первых, соединение получится неразъемным, поэтому установка подшипников будет возможна только с одного конца вала, что потребует обработки всей цапфы вала, что повысит трудоемкость и стоимость редуктора. Во-вторых, появляется опасность возникновения радиальных биений при работе редуктора. В-третьих, нет возмож-

ности проворачивать водило на валу для лучшей фиксации и концентричности. Теми же недостатками обладает соединение с натягом.

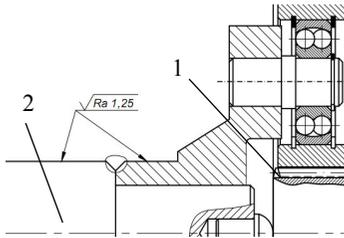


Рис. 1. Соединение сваркой

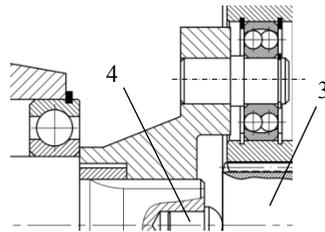


Рис. 2. Шлицевое соединение

Способы крепления водила и вала посредством шпоночного и шлицевого соединения также имеют достоинства и ряд существенных недостатков. При их сравнении преимущество за шлицевым соединением, так как шпоночное соединение не обеспечит требуемого центрирования деталей [3].

При самоустанавливающейся центральной шестерне 3 (рис. 2) фиксация в осевом положении происходит с одной из сторон с помощью упора 4 (рис. 2). В шлицевом соединении потребуется вместо упора установить коническую резьбовую пробку, распирающую вал для увеличения диаметра, что надежно удержит водило на валу. Следовательно, вал ослабляется шлицами и отверстием под пробку. Также механическая обработка вала повышает стоимость редуктора.

Наряду с традиционными решениями существует современный способ фиксации водила на валу – фрикционное соединение упругими коническими кольцами 5 (рис. 3). Соединения коническими кольцами получают все большее распространение благодаря простоте механической обработки, возможности передачи моментов и осевых сил за счет использования сил трения на поверхностях контакта. Число сборок и разборки почти неограниченно. При затягивании винтов на водиле пружинные кольца надвигаются одно на другое. Наружные кольца растягиваются и плотно прижимаются к водилу, внутренние кольца сжимаются и плотно прижимаются к валу.

Наиболее важным для работы планетарного редуктора является то, что соединение коническими кольцами обеспечивает хорошее центрирование водила. При подборе нескольких комплектов колец необходимо учитывать, что момент или осевая сила, передаваемые вторым комплек-

том, составляют примерно 0,5; третьими – 0,25 и четвертыми – 0,125 от номинальных значений. Следовательно, использование более 3-4 комплектов колец является нецелесообразным [3].

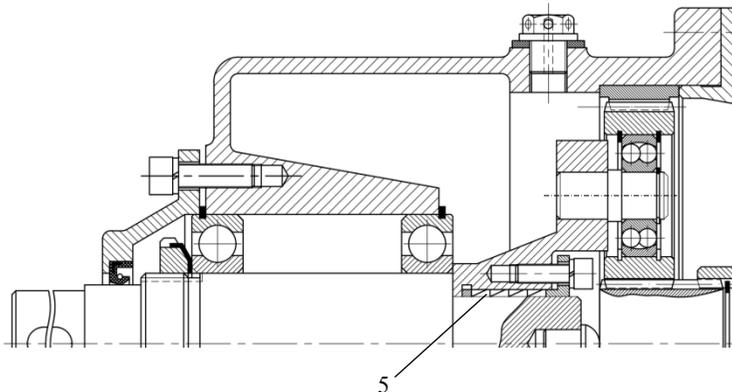


Рис. 3. Соединение упругими коническими кольцами

В результате проведенного анализа конструктивных решений фиксации водила и вала в планетарном редукторе установлено, что фрикционное соединение коническими кольцами является предпочтительным, так как обладает существенными преимуществами перед традиционными способами фиксации, обеспечивая более точное центрирование, многократность сборки/разборки и технологичность конструкции.

Литература

1. Дунаев, П. Ф. Конструирование узлов и деталей машин: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. – 13-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 568 с.
2. Атлас конструкций узлов и деталей машин: учеб. пособие / Б. А. Байков и др.; под ред. О. А. Ряховского, О. П. Леликова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 400 с.
3. Иосилевич, Г. Б. Детали машин: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / Г. Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.

Лушниченко Н. С., Капустин А. В.

Поволжский государственный технологический университет

АНАЛИЗ ТОКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК BLCD ПРИВОДОВ ДЕТСКОГО ЭКСОСКЕЛЕТА МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Аннотация. Проведены испытания детского экзоскелета медицинского назначения при воспроизведении локомоции прямолинейной ходьбы. В ходе испытаний получена телеметрия с четырёх BLCD приводов педипуляторов: токи и углы поворота, температура.

Ключевые слова. экзоскелет, детский экзоскелет, ресурсные испытания экзоскелета, токи BLCD приводов, энергосиловые характеристики привода экзоскелета.

Введение. Детский экзоскелет медицинского назначения предназначен для помощи больным детям от 7 до 13 лет с нарушениями опорно-двигательного аппарата. Он может использоваться как вспомогательное средство передвижения, так и полностью повторять локомоторные движения человека. Каждая нога – педипулятор, состоит из бедра, голени и стопы.

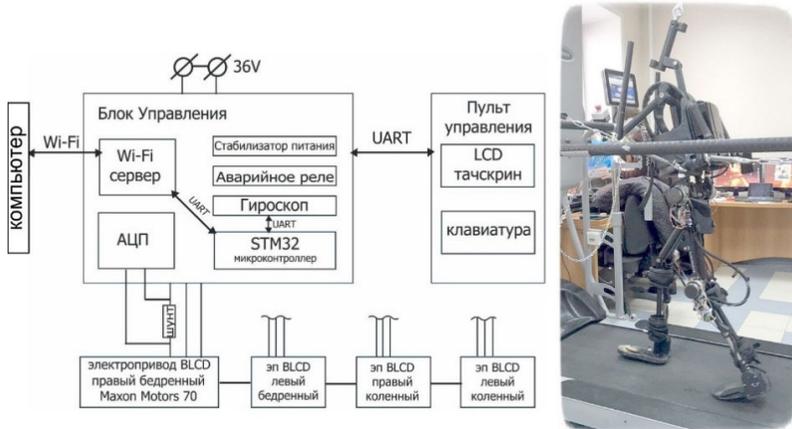


Рис. 1. Структурная схема измерения токовой нагрузки.
Общий вид установки для испытания детского экзоскелета

Экзоскелет в каком-то смысле повторяет скелет человека. Звенья экзоскелета последовательно соединены между собой шарнирно и имеют

шесть степеней свободы, две из которых пассивные. Экзоскелет закрепляется на человеке при помощи ремней-лямок. Для обеспечения устойчивости экзоскелета и дополнительной поддержки экзоскелет снабжен двумя ручками, за которые обслуживающий персонал может вовремя подстраховывать пациента.

Целью исследования является измерение токовых и температурных характеристик BLCD приводов. На основании сравнения можно будет сделать выводы об правильности работы и надёжности приводов.

Теория. Описание кинематики движения экзоскелета, а также электротехническая схема приводятся в работах [1, 2]. Положение корпуса т. D , можно описать уравнениями

$$\begin{cases} x_D = l_B \sin \alpha + l_G \sin \beta + x_B \\ y_D = l_B \cos \alpha + l_G \cos \beta + y_B \end{cases},$$

для геометрии движения и

$$\begin{cases} x_D = \int v dt \\ y_D = l_B + l_G + \frac{f_D}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{0,5T} t + \psi \right) - 1 \right] \end{cases},$$

для кинематики. Здесь $T = \frac{2L_{ш}}{v} = \frac{2L_{ш}}{x_D}$ – длительность (период) цикла

шага; f_D – размах колебаний центра тяжести человека по вертикальной оси; ψ – начальная фаза колебаний, l_B и l_G длина бедра и голени.

Описание эксперимента. Экзоскелет весом 15 кг с весовым манекеном ребёнка весом 43 кг был установлен на подвижную дорожку Тредмил «ReaTeга» (рис. 1). Для предотвращения падения экзоскелет был закреплен пружинными подвесами к перилам. Далее дорожке придавалось движение и одновременно с этим экзоскелет начинал движение. Проводилась ходовая регулировка, после которой экзоскелет переходил в циклический установившийся режим работы.

Структурная электрическая схема измерения приведена на рисунке. Экзоскелет оснащен электромеханическими бесколлекторными вентельными BLCD моторами постоянного тока, управляемыми посредством широкоимпульсной модуляции. Замеры энергосиловых показателей проводились методом шунтирования, фиксировались АЦП и передавались на компьютер с помощью беспроводного подключения по сети Wi-Fi. Для наиболее точного снятия показаний и уменьшения случайных отклонений показания снимались при уже установившейся (циклической) работе экзоскелета. Человек-оператор может выбрать одну из рабочих программ, при помощи пульта ручного управления, в основе которого используется микро-

контроллер. Сами же режимы работы программ и упражнения загружаются компьютера на бортовой процессор посредством беспроводной сети Wi-Fi.

Результаты эксперимента. С датчиков телеметрии 4-х BLCD приводов снимались следующие показания: температура, углы поворота, ток. Скорость движения экзоскелета составляла 2,5 км/ч. Экзоскелет двигался непрерывно в течение 5 часов 30 минут, всего было пройдено 13,75 километра. За это время было проведено 34700 шагов измерений. Частота дискретизации измерений составила 17,5 герц.

Параметр	LU	RU	LD	RD
Ток средний	1,207	1,588	1,486	1,257
Ток медианный	1	1,3	1,5	1,2
Максимальный удельный ток, А/кг	0,34	0,33	0,23	0,28
Средний удельный ток, А/кг	0,0208	0,0274	0,0256	0,0217
Медианный удельный ток, А/кг	0,0172	0,0224	0,0259	0,0207
Температура в начале эксперимента, °С.	30	32	34	31
Температура в конце эксперимента, °С.	46	43	48	44
Средняя температура	42	39	44	40

Вывод. В таблице представлены токовые и температурные параметры приводов за время эксперимента. Из представленных данных видно, что приводы работают в нормальном установившемся режиме без значительного нагрева с рабочей температурой около 46°С, что является вполне допустимым. Среднее потребление тока в пределах 0,025 А на килограмм веса.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»)), шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Компьютерное моделирование регулярной ходьбы на основе кинематического анализа движений и синтеза алгоритмов управления экзоскелета / Ю. В. Лоскутов, А. В. Капустин, К. С. Клюжев и др. // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2017. – № 3 (35). – С. 47-60.
2. Схемные решения системы управления реабилитационным экзоскелетом медицинского назначения / А. В. Капустин, Ю. В. Лоскутов, Д. В. Скворцов и др. // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2018. – № 2 (38). – С. 77-86.

3. Winter, David A., Biomechanics and motor control of human movement / David A. Winter. – JOHN WILEY & SONS, INC., 2009 – 370 p. ISBN 978-0-470-39818-0 (cloth).

УДК 621.86

Остроухов И. О.

Научный руководитель: Лагерев И. А., д-р техн. наук, профессор

Брянский государственный университет

имени академика И. Г. Петровского

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ АНКЕРНОЙ ОПОРЫ ПЕРЕДВИЖНОГО СТРЕЛОВОГО КРАНА

***Аннотация.** В работе рассматривается улучшенная конструкция анкерной опоры передвижного стрелового крана. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-10274).*

***Ключевые слова:** передвижной стреловой кран, кран-манипулятор, анкерная опора, аутригер, анкерное устройство.*

Передвижные стреловые краны (автомобильные краны, краны-манипуляторы) широко используются для механизации погрузочно-разгрузочных и строительных работ [1]. В последнее время участились случаи аварий данных машин, вызванные потерей общей устойчивости (опрокидыванием) под действием грузового момента [2; 3].

Для повышения общей устойчивости было предложено использовать совместно с выносными опорами (аутригерами) дополнительные анкерные устройства. Рабочие органы анкерных устройств представляют собой плоские ножи, которые вводятся в грунт под опорную плиту выносной опоры аутригера [2]. Это позволяет на 30...50% увеличить восстанавливающий момент, препятствующий опрокидыванию крана [2; 4].

Исходная конструкция выносной опоры показана на рис. 1. На раме 1 базового шасси 2 установлен кран 3. На раме 1 также закреплены кронштейны 4 выносных опор. На концах кронштейнов 4 установлены опорные устройства 5 и анкерные устройства 6, расположенные под углом к опорным устройствам 5. Опорное устройство (ОУ) состоит из корпуса 7, внутри которого вдоль его оси перемещается несущая стойка 8, на конце которой установлена опорная плита 9, передающая нагрузку со стороны крана на грунт. Несущая стойка приводится в движение ме-

ханизмом 10 с гидроприводом. Анкерное устройство (АУ) состоит из корпуса 11, закрепленного на аутригере с помощью удерживающих стержней 12. Рабочий элемент 13 в виде плоского ножа с прямолинейной продольной осью совершает прокалывающее поступательное движение в грунте при помощи приводного гидроцилиндра 11 [2; 5].

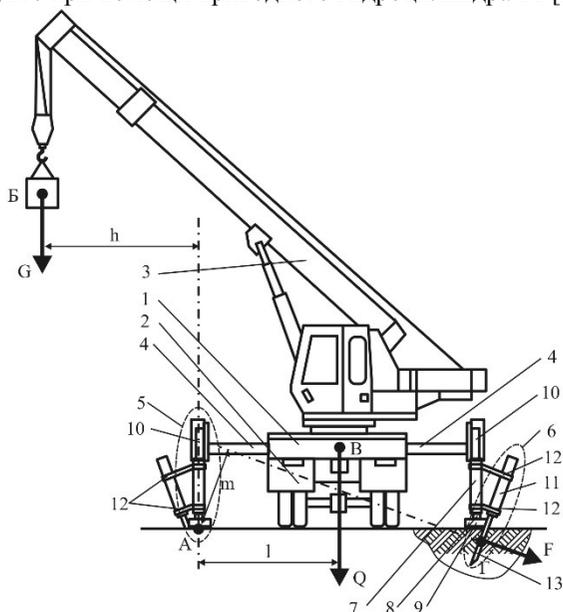


Рис. 1. Конструкция выносной опоры с анкерным устройством:

- 1 – рама крана; 2 – базовое шасси; 3 – стрела; 4 – кронштейн аутригера;
- 5 – опорное устройство (ОУ) аутригера; 6 – анкерное устройство (АУ) аутригера;
- 7 – корпус ОУ; 8 – несущая стойка ОУ; 9 – опорная плита ОУ;
- 10 – подъемно-опускной приводной механизм ОУ; 11 – гидроцилиндр АУ;
- 12 – удерживающие стержни АУ; 13 – рабочий элемент АУ [5]

Существенным недостатком рассмотренной конструкции является то, что рабочий элемент анкерного устройства при эксплуатации обеспечивает максимально эффективное восприятие внешней нагрузки от опрокидывающего момента только тогда, когда плоскость действия опрокидывающего момента перпендикулярна к рабочей (широкой) стороне плоского ножа. Однако при повороте стрелы эта плоскость может значительно отклониться от перпендикулярности. Вследствие чего анкерное устройство оказывается практически неработоспособным [5].

Для решения указанной проблемы предлагается вдоль не менее чем одной боковой поверхности рабочего элемента выполнять полку шириной, превышающей толщину рабочего элемента (рис. 2, а). Также возможно использование X-образного сечения (рис. 2, б). При этом угол скрещения выступов $\beta = 2\arcsin(b/M)$, где b – толщина плоского выступа; M – ширина поперечного сечения рабочего элемента (рис. 2, б).

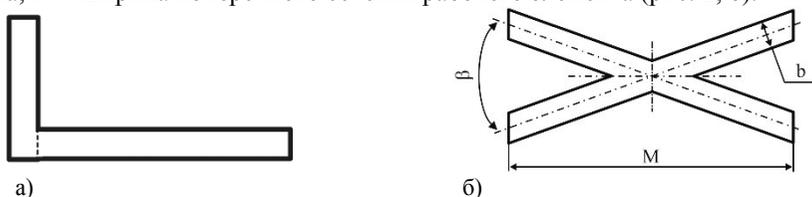


Рис. 2. Усовершенствованная конструкция рабочего элемента анкерного устройства: а – плоский нож с дополнительной полкой; б – рабочий элемент с X-образным сечением

Технико-экономический результат от внедрения предлагаемого анкерного устройства достигается за счет повышения общей устойчивости передвижных стреловых кранов, а также расширения условий их применения, при которых указанные машины можно безопасно эксплуатировать с максимальными паспортными грузо-высотными характеристиками. Это приводит к повышению общей производительности и безопасности работы передвижных стреловых кранов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-10274).

Литература

1. Лагерев, А. В. Модернизация крана-манипулятора самоходной энергетической машины АСТ-4-А / А. В. Лагерев, И. А. Лагерев, В. В. Говоров // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2010. – №4. – С. 59-66.
2. Лагерев, А. В. Влияние анкеровки выносных опор на устойчивость мобильных транспортно-технологических машин, оснащенных стреловыми манипуляционными системами / А. В. Лагерев, И. А. Лагерев // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2018. – №2. – С. 152-169.
3. Лагерев, И. А. Динамическая нагруженность крана-манипулятора машины для сварки трубопроводов при движении с грузом / И. А. Лагерев // Подъемно-транспортное дело. – 2011. – №3. – С. 7-10.
4. Гончаров, К. А. Экспериментальная оценка эффективности использования анкерных устройств на выносных опорах мобильного крана / К. А. Гончаров, И. О. Остроухов // Сборник материалов Всероссийской научно-практической

конференции «Современная наука: идеи, которые изменят мир». – Брянск: РИО БГУ, 2018. – С. 85-88.

5. Пат. 186456 Рос. Федерация: МПК⁷ В66С23/64. Выносная опора мобильной грузоподъемной машины / Лагереv А. В., Лагереv И. А., Остроухов И. О.; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «БГУ им. ак. И. Г. Петровского». – №2018136727; заявл. 17.10.18; опубл. 21.01.2019, Бюл. № 3. – 2 с.

УДК 621.85-52

Соловьева М. Д., Афанасьева Е. В., Ивличева Е. А.,
Капустин А. В., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПОДДЕРЖАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКЗОСКЕЛЕТА МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

***Аннотация.** Представлен способ для повышения эффективности системы поддержания вертикальной устойчивости экзоскелета медицинского назначения при критических наклонениях. Способ достигается тем, что в процессе движения изменяются координаты общего центра тяжести путём смещения составной части экзоскелета – аккумуляторной батареи.*

***Ключевые слова:** экзоскелет, экзоскелет медицинского назначения, поддержание устойчивости экзоскелета, баланс экзоскелета.*

Экзоскелет медицинского назначения призван помогать в реабилитации пациентам с нарушениями опорно-двигательного аппарата. Конструкция экзоскелета имеет 6 степеней свободы в сагиттальной плоскости, две из которых являются пассивными (упругими) [1]. Человек (пользователь) при движении в медицинском экзоскелете не имеет способности поддерживать вертикальную устойчивость, поэтому данная задача должна решаться при помощи неких мер, которые приведут к естественным локомоторным движениям без падения.

Представленный способ относится к техническим средствам и может быть использован для повышения устойчивости движения экзоскелета. Техническим результатом является повышение эффективности системы обеспечения устойчивости экзоскелета с пользователем при критических наклонениях.

Электрическая схема экзоскелета включает в себя датчики положения (гироскопы) в сагиттальной и фронтальной плоскостях [2]. При

критических наклонениях происходит изменение координат общего центра масс экзоскелета с пользователем путем смещения составной части экзоскелета, в качестве которой используется аккумуляторная батарея экзоскелета, автоматически смещаемая в противоположную сторону при приближении проекции общего центра масс экзоскелета с пользователем к границам площади опоры экзоскелета (рисунок).

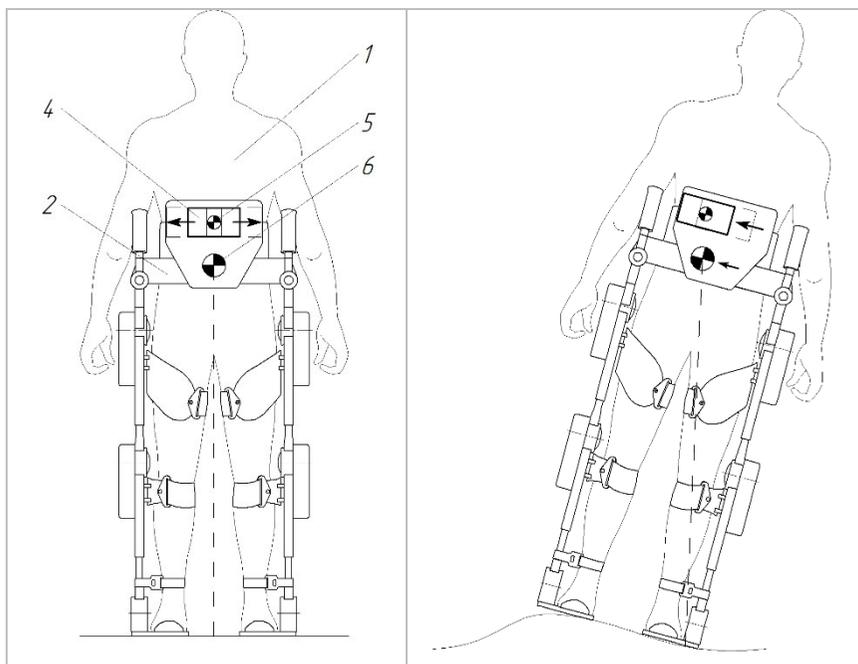


Схема экзоскелета с пользователем в нормальном и критическом положении

Потеря устойчивости и опасные наклонения могут возникать вследствие неровностей поверхности, по которой перемещается экзоскелет 2 с пользователем 1, при запинаниях, при внешних физических возмущениях, например, столкновениях, при сбоях в системе управления экзоскелетом, при некорректном использовании экзоскелета, при ошибках в действиях ассистирующего. В этом случае проекция общего центра масс 6 экзоскелета с пользователем будет находиться вблизи границ площади опоры ступней экзоскелета.

Для исключения риска падения экзоскелета с пользователем необходимо общий центр масс отвести от границы площади опоры экзоскелета. Для этого массивная аккумуляторная батарея 4 перемещается в эк-

зоскелете в противоположную от наклона сторону, перемещая тем самым свой центр массы 5. Перемещение центра массы аккумуляторной батареи приводит к перемещению общего центра масс в сторону отведения от границы опоры экзоскелета без изменения положения экзоскелета, что приводит к более устойчивому состоянию.

Перемещения аккумуляторной батареи могут осуществляться внутренними механизмами экзоскелета, управляемыми командами от системы управления, которые формируются на основе показаний датчиков, фиксирующих критические наклоны.

На способ подана заявка на изобретение.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»)), шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Loskutov Y., Kapustin A., Kudryavtsev A., Nasibullin A., Lebedeva A. / Synthesis of exoskeleton control algorithms based on kinematic analysis of locomotions and human gait modelling // Journal of Applied Engineering Science 2018, Vol 16., Art 586, Pages 583-591. DOI: 110.5937/jaes16-17230.

2. Схемные решения системы управления реабилитационным экзоскелетом медицинского назначения / А. В. Капустин, Ю. В. Лоскутов, Д. В. Скворцов и др. // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2018. – № 2 (38). – С. 77-86. DOI: 10.15350/2306-2819.2018.2.77.

УДК 615.477.26

Соловьева М. Д.

Научный руководитель: Кудрявцев И. А., с. н. с.

Поволжский государственный технологический университет

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЧЕСКИ АДАПТИРУЕМЫХ ХОДУНКОВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПАЦИЕНТА

Аннотация. *Рассматривается способ обеспечения устойчивости пациента при передвижении по лестнице или неровной поверхности с помощью автоматической регулировки длины выдвигных частей ходунков.*

Ключевые слова: ходунки, устойчивость, автоматическая адаптация.

По экспертным оценкам, число потребителей реабилитационной продукции составляет свыше 60 млн. человек, включая инвалидов, пожилых граждан, детей, людей, получивших травму и проходящих реабилитационно-восстановительный период.

Правительством РФ утверждена Стратегия развития производства промышленной продукции реабилитационной направленности до 2025 года.

Инвалиды или пациенты, получившие травму, в результате которой оказываются не в состоянии передвигаться без посторонней помощи, используют ходунки. При подъеме или спуске по лестнице, при передвижении по неровной поверхности обычные ходунки оказываются неустойчивой опорой для пациента.

Данный способ ориентирован на повышение уровня комфортности пациента при ходьбе с ходунками за счет того, что позволит освободить внимание пациента от необходимости настраивать и фиксировать ходунки в устойчивое положение.

Пациент, опираясь на ходунки, остается в устойчивом состоянии при подъеме или спуске по лестнице, а также при передвижении по неровной поверхности. Кроме того, ходунки оснащены дисплеем, на который выводится информация о количестве пройденных шагов, уровне заряда батареи, пульсе и давлении пациента.

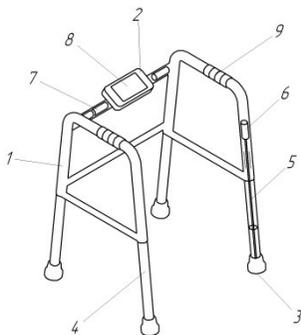


Рис. 1. Автоматически адаптируемые ходунки

Ходунки на рис. 1 содержат верхнюю раму 1, блок управления 2 с акселерометром, определяющим угол поворота ходунков и количество пройденных шагов. В резиновые наконечники встроены датчики касания 3. Выдвижная часть 4 кинематически связана через передачу винт-

гайка 5 с электроприводом 6, питаемым от аккумуляторной батареи 7. На дисплей 8 выводятся показатели давления, пульса пациента, полученные со встроенных в ручки ходунков, биометрических датчиков 9.

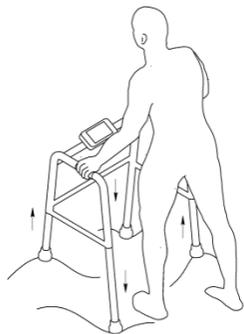


Рис. 2. Передвижение по неровной поверхности

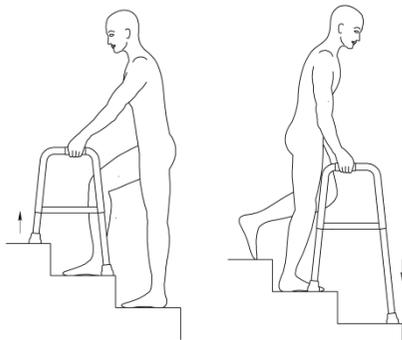


Рис. 3. Подъем и спуск по лестнице

Способ реализуется следующим образом. Во время движения пациента по наклонной, неровной поверхности (рис. 2) или по лестнице (рис. 3) при установке ходунков срабатывают датчики касания, и акселерометр реагирует на изменение угла отклонения верхней рамы конструкции от горизонтальной плоскости. Выдвижные части автоматически приводятся в движение от электроприводов через передачу винт-гайка и фиксируются таким образом, чтобы верхняя рама ходунков была параллельна горизонтальной плоскости и удалена относительно опорной поверхности на высоту, настроенную для определенного пациента.

К преимуществам предложенного способа можно отнести:

1. отсутствие необходимости самостоятельно настраивать и фиксировать ходунки в устойчивое положение;
2. возможность отслеживать показатели здоровья пациента;
3. возможность отслеживания пройденного пути, уровня заряда батареи и оставшегося времени работы ходунков.

Современные экзоскелеты медицинского назначения, в целях обеспечения достаточной безопасности пациентов, используются совместно с костылями или ходунками. Сегодня проблема обеспечения безопасности пациента при передвижении в экзоскелете по лестнице или неровной поверхности остается актуальной. Автоматически адаптируемые ходунки могут быть решением данной проблемы при их совместном использовании с экзоскелетом.

Автоматически адаптируемые ходунки могут использоваться для реабилитации пациентов, получивших серьезную физическую травму. Также их можно использовать и в повседневной жизни для пожилых людей и инвалидов. С помощью данных ходунков пациенты смогут комфортно передвигаться дома, при подъеме или спуске по лестнице и на улице.

Литература

1. Рекомендации Совета по делам инвалидов при Совете Федерации Федерального Собрания Российской Федерации [Электронный ресурс] // Официальный сайт Совета Федерации. – Режим доступа: <http://council.gov.ru/media/files/fDqG0zASJNAALmOjQoiE96H3APp4ivlh.pdf>.
2. Способ автоматической адаптации ходунков для повышения устойчивости пациента: заявка №2019103155 Рос. Федерация / Кудрявцев И. А., Соловьева М. Д., Перистый В. Ф., Андрианов Ю. С.; заявл. 05.02.19 г.
3. Способ управления костылями или тростью: заявка №2018108204 Рос. Федерация / Андрианов Ю. С., Кудрявцев И. А., Перистый В.Ф.; заявл. 07.03.18; приоритет 07.03.2018 г.

УДК 621.8

Фролов К. В.

Научный руководитель: Матлахов В. П., канд. техн. наук, доцент
Брянский государственный технический университет

ПОДБОР ПРИВОДА ДЛЯ РОБОТА ТИПА ГЕСКАПОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ»

Аннотация. Статья посвящена подбору привода для робота типа гексапод с использованием программного комплекса «Универсальный механизм».

Ключевые слова: *робототехника, сервопривод, момент, модель.*

Роботы и создаваемые на их основе робототехнические системы являются достаточно сложными устройствами. В настоящее время роботы, имитирующие движения представителей животного мира, становятся популярными среди исследователей. Они открывают небывалые возможности в передвижении, недоступные привычным гусеничным и колесным роботам.

Одной из основных задач, решаемых при проектировании роботов, является подбор привода, который будет развивать момент, необходимый для движения всего механизма. В робототехнике используются 3 основных типа привода: электрический, пневматический и гидравлический. Вне зависимости от типа привода основной его характеристикой является момент, развиваемый на его валу. Этот параметр является основным при подборе привода.

Для определения момента воспользуемся программным комплексом «Универсальный механизм». Для этого построим сборку предполагаемой модели робота в CAD системе Компас-3D.

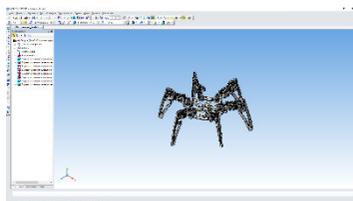


Рис. 1. Модель робота гексапода

Импортируем данную сборку в программный комплекс «Универсальный механизм», используя встроенный плагин, после чего изменим плотность компонентов модели на $\rho = 1250 \text{ кг/м}^3$, что соответствует плотности материала компонентов робота – пластика для 3d печати MakerBot PLA.

Эта настройка необходима, чтобы определить массу будущего робота. Опустим модель на поверхность под действием силы тяжести и построим графики моментов, развиваемых в приводах с помощью функции мастер переменных.

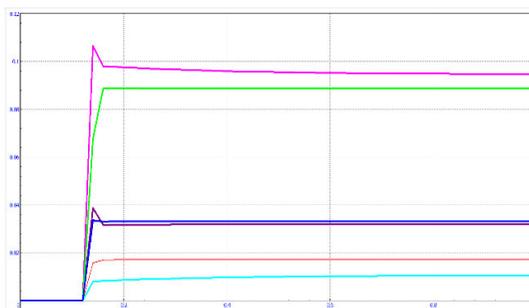


Рис. 2. Изменение момента во времени

Как видно из графика (рис. 2), пиковый момент не превышает $M = 0,12$ Нм.

После определения момента подберём тип привода. Широкое применение электропривода для управления объясняется рядом его достоинств и преимуществ по сравнению с другими видами приводов:

- к электроприводу требуется подвод только одного вида энергии, а при монтаже схемы управления приводом имеется мало вынесенных и при этом несложных электрических соединений;
- в отличие от большинства других приводов он может монтироваться не только непосредственно на звене, но и на расстоянии от него;
- при управлении электроприводами запаздывание во времени от подачи до исполнения команды незначительно;
- электросеть свободна от недостатков, свойственных другим сетям (засорение, обмерзание и т. д.).

Не существует других приводов, использующих один вид энергии, которые были бы в состоянии обеспечить местную и дистанционную сигнализацию как крайних положений рабочего органа, так и промежуточных;

подачу сигнала на пульт в случае заедания подвижных частей или попадания посторонних предметов в их полости. Остановимся на данном типе привода.



Рис. 3. Сервопривод MG90S

Воспользуемся сервоприводом MG90S (рис. 3) с максимальным развиваемым моментом $M = 0,25$ Н · м и имеющим следующие технические характеристики (таблица).

Характеристики сервопривода MG90S

Рабочее напряжение	4,8В ... 6,0В
Угол поворота	0...180°
Угловая скорость	0,1сек/60°
Материал шестеренок	металл
Размеры устройства	22,5мм x 12мм x 35,5мм
Вес	13,4 грамм

Программный комплекс «Универсальный механизм» позволяет подбирать привод для механизма, что существенно уменьшает количество расчётов, но требует наличия 3D модели объекта, для которого подбирается привод.

Чеканов В. С., Журавлев Е. А.

Поволжский государственный технологический университет

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ САМОКОМПЕНСАЦИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Аннотация. Изготовлена и представлена установка для демонстрации вынужденных колебаний сферического маятника с электроприводом, редуктором и кулисным механизмом, который обеспечивает равномерное поступательное перемещение конца маятника по окружности. Продемонстрирован эффект самокомпенсации вынужденных колебаний маятника как нелинейной колебательной системы

Ключевые слова: демонстрационная установка, электропривод, кулисный механизм, сферический маятник, подвижная точка подвеса, нелинейная колебательная система, самокомпенсация колебаний.

Несмотря на более чем 200-летнюю историю задача о колебаниях маятника до сих пор привлекает внимание исследователей [1], [2]. В работе [3] для сферического маятника была построена математическая модель:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\operatorname{tg}\beta - \frac{g \sin\alpha}{L \cos\beta} + \frac{1}{L \cos\beta}(\ddot{z}_O \sin\alpha + \ddot{y}_O \cos\alpha), \\ \ddot{\beta} = -\dot{\alpha}^2 \sin\beta \cos\beta - \frac{g}{L} \cos\alpha \sin\beta - \frac{1}{L}[\ddot{x}_O \cos\beta + (\ddot{y}_O \sin\alpha - \ddot{z}_O \cos\alpha) \sin\beta], \end{cases} \quad (1)$$

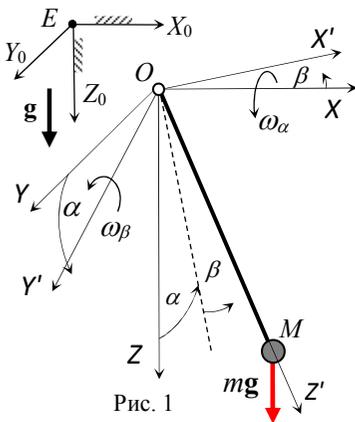


Рис. 1

пригодная для исследований вынужденных колебаний маятника с подвижной точкой подвеса O . Геометрический смысл параметров и переменных, входящих в уравнения (1) модели ясен из рис. 1.

При движении точки подвеса O согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} x_O &= 0,01L \sin(pt), & y_O &= 0,01L \sin(pt), \\ z_O &= 0 \end{aligned}$$

и нулевых начальных условиях, движение точки имеет характер, показанный на рис. 2: сначала радиус траектории точки M нарастает, а после

достижения максимального значения начинается обратный процесс – движение точки M по спирали сходящейся к исходному равносному положению.

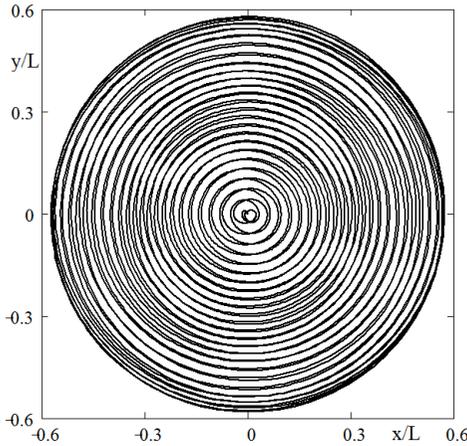


Рис. 2

Для демонстрации и исследования этого эффекта, обнаруженного в численном эксперименте, была спроектирована и построена физическая модель. При выборе параметров установки учитывались данные численного моделирования [3].

Длина L маятника из соображений наглядности взята равной 0,55 м. Радиус окружности, описываемой точкой подвеса – $0,01L = 5,5$ мм. Частота n обращения точки подвеса берется равной частоте малых свободных колебаний плоского маятника длиной L ,

т. е. $p = \omega = \sqrt{g/L}$, следовательно, $n = 1/T = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/L} = 40$ об/мин.

После определения основных параметров установки, было выполнено её конструирование и изготовление.

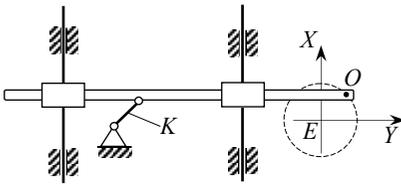


Рис. 3

В первую очередь был сконструирован механизм, обеспечивающий поступательное (без закручивания нити) движение верхнего конца O маятника. Как видно из кинематической схемы (рис. 3), это двойной кулисный механизм, изготовить который оказалось проще, чем шарнирный параллелограмм из элементов конструктора LEGO. Эксцентрик K был изготовлен на 3D принтере.

Электродвигатель постоянного тока JGA25-310-12 с редуктором был заказан по каталогу //ru.aliexpress.com/ и должен был обеспечивать номинальную частоту вращения 50 об/мин при напряжении 12 В. Для преобразования сетевого тока в постоянный был использован преобразователь MOL-FE-3A-C.

Для регулировки частоты вращения (до 40 об/мин) был изготовлен ручной регулятор напряжения по схеме, показанной на рис. 4.

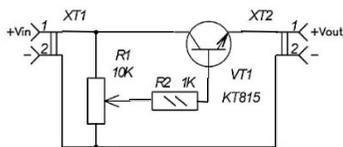


Рис. 4

В качестве точечного груза использован свинцовый шарик диаметром 8 мм; нитью служила пластиковая леска толщиной 0,02 мм. Вид всей установки после сборки показан на рис. 5.

После включения двигателя сначала наблюдалось поведение маятника напоминающее резонансный режим с нарастающей амплитудой. Точечный груз двигался по расходящейся спирали. Зафиксирован наибольший наблюдаемый радиус вращения груза около 40 см.



Рис. 5

После достижения максимального отклонения от вертикали движение груза не становится стационарным, а начинается обратный процесс – движение груза продолжается по суживающейся спирали к начальному равновесному состоянию. Таким образом на физической модели сферического маятника с подвижной точкой подвеса наблюдалась явление самокомпенсации его вынужденных колебаний, обнаруженное в численном эксперименте [3].

Литература

1. Cartwright J. H., Tritton D. J. Chaotic dynamics and reversal statistics of the forced spherical pendulum: comparing the Miles equations with experiment. – *Dynamical Systems*, Vol. 25, No. 1, March 2010, 1–16.
2. C. Fischer C., Naprstek J., Pospisil S. Resonance behavior of spherical pendulum – influence of damping. – *Trans.18-th Int. Conf., Engineering mechanics 2012*, pp. 255–261, Svratka, CR, May 14 – 17, 2012.
3. Журавлев, Е. А. Несингулярная математическая модель сферического маятника с подвижной точкой подвеса / Е. А. Журавлев // *Труды Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Технологическая*, 2017. – С. 229-234.

Чернышова О. И., Солоницын А. А., Леухин М. Д.,
Лоскутов Ю. В., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОЦЕНКА НАИБОЛЬШЕЙ НАГРУЗКИ В КОЛЕННОМ ШАРНИРЕ ЭКЗОСКЕЛЕТА ПРИ ВСТАВАНИИ С ОПОРЫ

***Аннотация.** В работе на основе метода кинестатики выполнен силовой анализ механизма системы человек-экзоскелет при переходе из сидячего на опоре положения в вертикальное и обратно. Расчетным путем получены значения наибольшего момента в коленном шарнире системы человек-экзоскелет в самом нагруженном положении при вставании с опоры для предельных параметров тела оператора. Сопоставление полученных значений с данными других авторов и проверка на опрокидывание системы человек-экзоскелет показало хорошую сходимость результатов.*

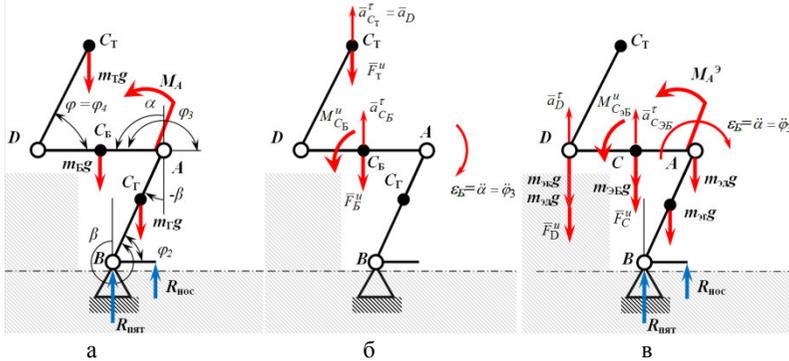
***Ключевые слова:** экзоскелет медицинского назначения, локомоции человека, устойчивость баланса в движении, многозвенный перевернутый маятник, метод кинестатики.*

Экзоскелеты как антропоморфные конструкции закрепляются на конечностях и корпусе человека, предназначены для воспроизведения естественных движений с возможным масштабированием по нагрузкам [1]. В отличие от экзоскелетов, предназначенных для усиления функциональных возможностей человека, реабилитационный экзоскелет должен полностью заменять локомоции человека. Следовательно, к нему должны быть предъявлены особые требования: повышенная прочность и жесткость звеньев и узлов, способных полностью удерживать вес тела человека (до 100 килограммов), высокая точность системы позиционирования суставов человека с кинематическими парами экзоскелета, приемлемая надежность системы креплений [2, 3]. Поэтому **актуальность работы** обусловлена необходимостью подбора конструктивных элементов и приводов под заданную нагрузку и режимы работы изделия.

Цель работы – силовой анализ механизма системы человек-экзоскелет при переходе из сидячего на опоре положения в вертикальное и обратно.

Рассматриваемый экзоскелет нижних конечностей [1] состоит из корпуса и двух ног. Каждая нога включает три последовательных звена, шарнирно связанных между собой: бедро, голень и стопу. Относительное угловое движение соответствующих пар звеньев обеспечивают четыре вращательных электропривода, совмещенные с коленными и тазобедренными шарнирами. Стопа крепится упругой связью. Экзоскелет

крепится на пациенте системой ремней. В шарнирах также установлены датчики угла поворота, а в стопах – датчики давления. Блок управления и аккумуляторы расположены в отдельном модуле на спине человека.



а б в
Кинестатика человека (а и б) и экзоскелета (в) при «вертикализации» в наиболее нагруженном положении

Представим модель движущегося человека как перевернутый маятник с закрепленной точкой B , с тремя степенями свободы (рис. а, б). Рассмотрим движение человека при вставании из седа («вертикализации») после сидения) на опоре. В наиболее нагруженном положении предполагаем, что движение происходит только в направлении угла α , (то есть точка A в данном положении в текущий момент времени неподвижна). В соответствии с принципом Даламбера для части конструкции ADC запишем уравнение кинестатики:

$$\sum M_A(F_k) = m_B g |AC_B| + M_A + m_T g (|AD| - |DC_T| \cos \varphi) + F_B^u |AC_B| + M_B^u + F_T^u (|AD| - |DC_T| \cos \varphi) = 0.$$

Для экзоскелета (рис. в) получаем аналогично

$$\sum M_A(F_k) = m_{эБ} g |AC| + M_A^э + m_{кэ} g |AD| + m_{эд} g |AD| + F_C^u |AC| + M_{эБ}^u + F_D^u |AD| = 0.$$

Главные векторы и моменты сил инерции i -го звена находим как

$$F_i^u = m_i a_{ci} \quad \text{и} \quad M_{ci}^u = I_{ci} \varepsilon_i.$$

Предполагаем, что в данном положении торс человека двигается поступательно по окружности вместе с шарниром D . С учетом положений локальных центров тяжести сегментов тела человека, центров тяжести стержней и точечных масс экзоскелета, после вычислений получаем величины вращающих моментов в наиболее нагруженном коленном шарнире. Для человека ростом 190 см и весом 100 кг, при весе экзоскелета

около 20 кг значения моментов в коленном суставе получаются следующие: вращающий момент в одном сервоприводе системы человек-экзоскелет равен 180 Нм; статическая составляющая момента будет 164 Нм. Результирующий момент человека без экзоскелета составляет 132 Нм. Сопоставление значений моментов с данными других авторов [2-4] показало сходимость результатов при одинаковых исходных данных для оператора весом 60 кг и 70 кг.

Была проведена проверка равновесия системы человек-экзоскелет [5]. Полученные результаты исключают опрокидывание устройства с оператором.

Выводы. Расчетным путем получены значения наибольшего момента в коленном шарнире системы человек-экзоскелет в самом нагруженном положении при вставании с опоры для предельных параметров тела оператора.

Сопоставление полученных значений с данными других авторов и проверка на опрокидывание системы человек-экзоскелет показало сходимость результатов.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства многофункционального роботизированного экзоскелета медицинского назначения («РЭМ»», шифр 2017-218-09-1807, утверждённого по постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218.

Литература

1. Yury Loskutov, et al. Synthesis of exoskeleton control algorithms based on kinematic analysis of locomotions and human gait modeling // Journal of Applied Engineering Science. 2018. – Vol. 16, No. 4. – P. 583-591. DOI:10.5937/jaes16-17230.
2. Турлапов, Р. Н. Модели и алгоритмы управления движением экзоскелета для вертикализации и расширения функциональных возможностей человека / Р. Н. Турлапов // Рук. дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – Курск: ФГБОУ ВО «Юго-Запад. гос. ун-т». – 2015. – 172 с.
3. Моделирование процессов вставания экзоскелета из положения сидя / Г. Я. Пановко, С. И. Савин, С. Ф. Яцун и др. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 3. – С. 19-24.
4. Taslim Reza S.M., Ahmad N., Choudhury I.A. et al. A Fuzzy Controller for Lower Limb Exoskeletons during Sit-to-Stand and Stand-to-Sit Movement Using Wearable Sensors // Sensors. 2014. 14(3). P. 4342-4363.
5. Лоскутов, Ю. В. Оценка максимального момента в коленном приводе экзоскелета при вставании с опоры / Ю. В. Лоскутов, И. А. Кудрявцев // Вестник Поволжск. гос. технол. ун-та. Сер.: Материалы. Конструкции. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 55-62.

Шурыгин С. В., Ваничев А. К., Шлычков С. В.
Поволжский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА УПРУГО-ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДРЕВЕСИНЫ

***Аннотация.** Представлена экспериментальная методика определения упругих и диссипативных свойств различных материалов. На ее основе проведен сравнительный анализ влияния поздней древесины на ее диссипативные свойства. Установлено увеличение декремента колебаний для образцов с большим содержанием поздней древесины. При этом имеет место амплитудно-независимое демпфирование.*

***Ключевые слова:** декремент колебаний, диссипативные свойства, собственная частота.*

Введение. В настоящее время для идентификации упруго-диссипативных свойств древесины существует метод [1]. Этот достаточно трудоемкий подход успешно используется для определения декремента колебаний на низшей собственной частоте. Однако для построения корректной математической модели динамической системы из древесины [2] необходима более полная информация. В этой связи разработка подходов к выявлению основных закономерностей диссипации энергии, как по объему тела, так и по частотной шкале представляется актуальной. Для проведения экспериментальных исследований использована специальная установка [3].

Эксперимент. Принципиальная схема устройства для анализа диссипативных свойств изображена на рис. 1а. На образец 1 плотно надевается металлический колпачок 2. Один конец образца закрепляется в станине с помощью зажимного устройства 3. На электромагнитный датчик 4 подается гармонический сигнал звуковой платы компьютера 6. По средством электромагнитного датчика 5 сигнал от колеблющегося колпачка поступает на вход 6 и колебательный процесс отображается на экране монитора 7 посредством графопостроительной программы. Имеется возможность варьировать частоту и величину вынуждающей силы. В случае прекращения подачи сигнала на электромагнитный вибратор 4 образец переходит в режим свободных затухающих колебаний (рис. 2). Дальнейший анализ полученной затухающей кривой позволяет делать выводы о диссипативных свойствах образца. Определяется величина амплитуд колебаний на виброграмме (рис. 2).

С помощью представленных формул определяется декремент коле-

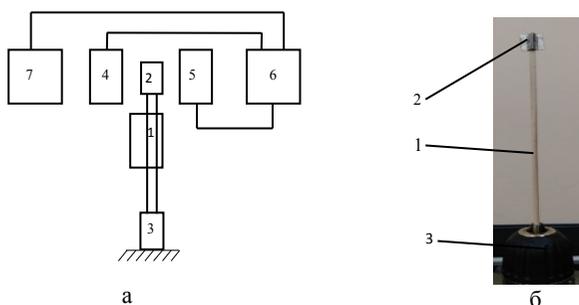


Рис. 1. а) установка для определения упруго-диссипативных свойств материалов; б) – образец 1 с «колпачком» 2

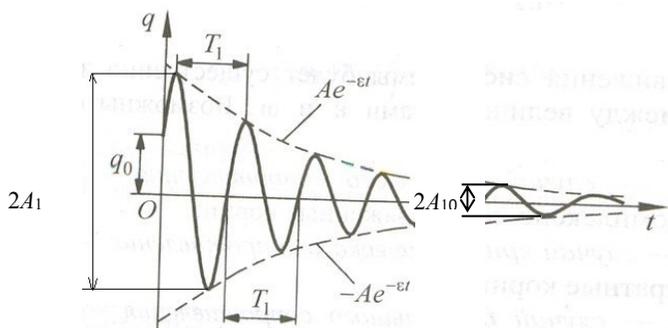


Рис. 2. График затухающих колебаний

баний $\Delta = \frac{1}{d}$; $d^{k-1} = \frac{A_k}{A_1}$; $k = 10$. Здесь k – это количество условных пе-

риодов затухающих колебаний, в течение которых измеряется декремент. Величина k принимается достаточно большой для уменьшения погрешности измерений. Таким образом, было изучено влияние поздней древесины и амплитуды колебаний на способность рассеяния энергии. Взято два геометрически одинаковых образца длиной 180 мм и диаметром 5, вырезанных вдоль волокон древесины. Они последовательно исследованы посредством прибора [3]. При этом максимальная величина гармонической вынуждающей силы принимала следующие значения: $0,2F_{max}(t)$, $0,6F_{max}(t)$, $F_{max}(t)$. Для каждой из них определялся декремент. После первой серии экспериментов диаметр образцов уменьшили до 4 мм и провели вторую серию, а затем до 3 мм и эксперименты повторились в третий раз для каждого образца. Очевидно, что на каждом шаге

содержание поздней древесины в теле образца становилось меньше. Полученные результаты представлены в таблицах.

Образец 1			
Интенсивность силового воздействия	Вес [г]		
	2,3	1,68	0,93
	∅ 5	∅ 4	∅ 3
20%	1,14	1,17	1,07
60%	1,29	1,16	1,06
100%	1,31	1,18	1,04
Δср	1,25	1,18	1,06

Анализ представленных в таблице данных позволяет сделать следующие выводы.

Установлено, что диссипативные свойства древесины не одинаковы по объему тела. Высокое содержание поздней древесины в конструкции увеличивает ее поглощающую способность. Декремент колебаний у тонких образцов на 20% ниже. Этот эффект не зависит от величины амплитуд колебаний, от интенсивности силового воздействия.

Образец 2			
Интенсивность силового воздействия	Вес [г]		
	2,77	1,85	1,03
	∅ 5	∅ 4	∅ 3
20%	1,19	1,17	1,03
60%	1,26	1,11	1,03
100%	1,22	1,14	1,03
Δср	1,22	1,14	1,03

Следовательно, для конструкций из древесины следует использовать модель амплитудно-независимого демпфирования.

Литература

1. ГОСТ 16483.31-74. Древесина. Резонансный метод определения модулей упругости и сдвига и декремента колебаний.
2. Шлычков, С. В. Влияние породы древесины на качество акустических панелей / С. В. Шлычков // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. – 2016. – Т. 20, № 4. – С. 60-63.
3. Шлычков, С. В. Методика оценки упруго-диссипативных характеристик материалов / С. В. Шлычков // Механика композиционных материалов и конструкций сложных и гетерогенных сред: сб. мат. Всерос. научн. конф. Москва, 2015 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 311-313.

УДК 539.376

Ахметзянова Д. Р., Волкова М. Ю., Иванов С. П.
Поволжский государственный технологический университет

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

***Аннотация.** Рассматриваются колебания систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы.*

***Ключевые слова:** колебания стержневых систем, конечное, бесконечное число степеней свободы.*

Вопрос исследования колебаний стержневых и пространственных систем является достаточно актуальным. Строительные, машиностроительные, авиационные, корабельные конструкции подвергаются различным динамическим воздействиям.

Цель данной работы заключается в исследовании колебаний статически определимых и неопределимых стержневых систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы и условия их взаимозаменяемости. Исследуем два вида балок: консольную и защемленную по концам, длиной l и с распределенной массой бесконечным и конечным числом степеней свободы на свободные и вынужденные колебания.

Рассмотрим консольную балку. Используя уравнения начальных параметров [1], определим частоту основного тона – первую частоту ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{1,875 l^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}}, \quad (1)$$

где \bar{m} – распределенная масса балки, EJ – изгибная жесткость балки.

Для балки с сосредоточенной массой M , расположенной на конце, имеем первую частоту свободных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EJ}{Ml^3}}. \quad (2)$$

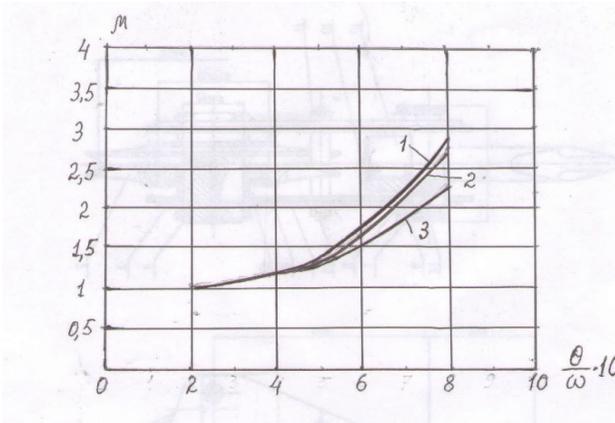
Сравнивая формулы (1) и (2), получим приведенную массу $M = 0,25\bar{m}l$.

Выполняя аналогичные расчеты получим приведенную массу, расположенную в середине пролета для защемленной балки

$$M = 0,4\bar{m}l.$$

Выполнялся расчет на вынужденные колебания балок с сосредоточенной массой M при следующих частотах $\theta=0,2\omega_1$, $\theta=0,4\omega_1$, $\theta=0,5\omega_1$, $\theta=0,8\omega_1$. Динамический коэффициент определялся по известной формуле:

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}. \quad (3)$$



Графики зависимостей динамического коэффициента μ от соотношения θ/ω для консольной и балки с защемленными концами

Следующий расчет балок выполнялся как системы с бесконечным числом степеней свободы с использованием метода начальных параметров [1]. Для каждого фактора (изгибающего момента M_0 , поперечной силы Q_0 в заделке и прогиба y на конце консольной и в середине пролета защемленной балки) динамический коэффициент определялся из соотношений динамических и статических величин:

$$\mu_M = M_{0(d.)}/M_{0(ст.)}; \quad \mu_Q = Q_{0(d.)}/Q_{0(ст.)}; \quad \mu_y = y_{(d.)}/y_{(ст.)}.$$

На рисунке кривая 1 показывает изменение динамического коэффициента для балок с сосредоточенной массой. Кривая 2 соответствует изменению динамического коэффициента по прогибу μ_y и по изгибающему моменту μ_M , а кривая 3 соответствует μ_Q для балок с распределенной массой.

Выводы

1. Наименьшее расхождение между значениями динамических коэффициентов при расчете балок с сосредоточенной и распределенной массой наблюдается при изменении отношения частот от 0,2 до 0,5 (рисунок).

2. Незначительное расхождение динамических коэффициентов наблюдается при определении прогибов и изгибающих моментов в пределах $\theta/\omega_1 = 0,5 \div 0,8$. График является восходящим, т. е. при увеличении отношения частот динамические коэффициенты также увеличиваются.

3. Значительные расхождения между значениями динамических коэффициентов наблюдаются при определении поперечных сил (см. кривые 3 и 1 на рисунке).

Литература

1. Предельное равновесие, динамика и устойчивость стержневых систем / С. В. Андреев, С. Д. Гольман, В. И. Заплатин и др. – Йошкар-Ола: ПГТУ, 1986. – 98 с.

УДК 539.3

Васильева О. С., Иванов О.Г.

Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ НА ОСНОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

***Аннотация.** Проводится исследование устойчивости статически неопределимых систем методом перемещений.*

***Ключевые слова:** метод перемещений, уравнения трех перемещений, устойчивость, критическая сила.*

В инженерных конструкциях широко применяются стержневые системы, представляющие собой статически неопределимые системы. В статически неопределимых системах при действии внешней нагрузки невозможно определить все усилия, используя только лишь уравнения статики. Для расчета таких систем используют два основных метода – метод сил и метод перемещений.

Целью данной работы является вывод уравнений трех перемещений и расчет на устойчивость статически неопределимых систем на основании полученных уравнений.

Уравнения трех перемещений выводятся из канонических уравнений метода перемещений на примерах статически неопределимой рамы рис. 1, а. Основная система метода перемещений образуется путем введения заделок во все жесткие узлы рис. 1, б.

От единичного поворота i -ой дополнительной заделки основной системы выше узла $i-1$ и ниже узла $i+1$ рамы стержни деформироваться не будут, поэтому каждое из канонических уравнений будет содержать лишь три неизвестные, так как внешняя сила приложена в узле, то все свободные члены канонических уравнений метода перемещений будут равны нулю:

$$r_{i,i-1}Z_{i-1} + r_{i,i}Z_i + r_{i,i+1}Z_{i+1} = 0. \quad (1)$$

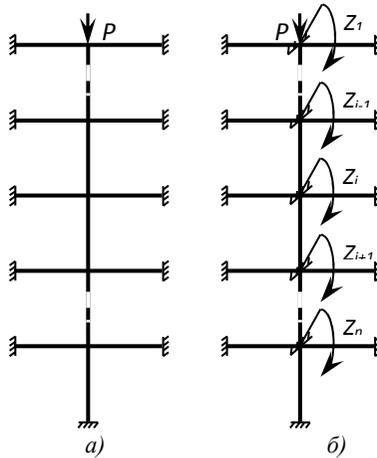


Рис. 1

При потере устойчивости будет происходить поворот узлов, следовательно, $Z_i \neq 0$. Система (1) будет иметь ненулевое решение для неизвестных, если определитель, составленный из коэффициентов r_{ij} , будет равен нулю

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n,n-1} & r_{n,n} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты r_{ij} зависят от параметра ν , связанного с сжимающей силой P . Раскрывая определитель (2), определяем параметра ν и критическую силу по формуле $P_{кр.} = \frac{\nu^2 EI}{l^2}$.

На основе формул выполнен расчет на устойчивость рамы.

В зависимости от изменения геометрических параметров рамы определяется величина критической силы. Результаты исследования представляются графически (рис. 2-5).

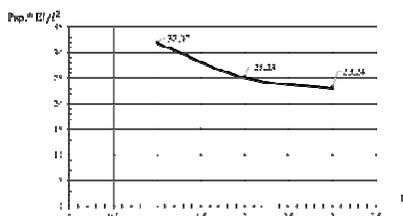


Рис. 2. Зависимость критической силы от изменения числа этажей системы

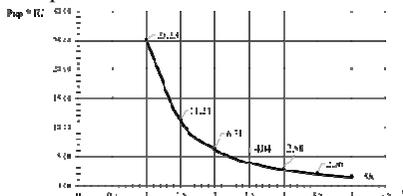


Рис. 3. Зависимость критической силы от длины вертикального стержня

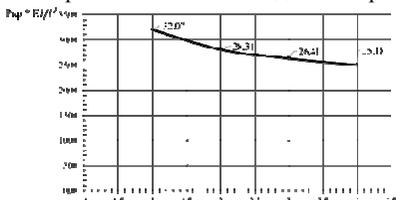


Рис. 4. Зависимость критической силы от относительной длины горизонтального стержня

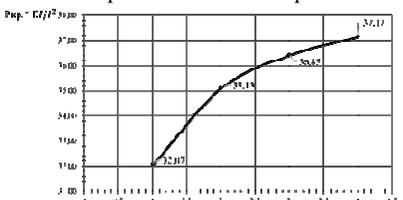


Рис. 5. Зависимость критической силы от жесткости горизонтального стержня

Выводы

1. Чем больше количество этажей системы, тем значение критической силы меньше.
2. Чем больше длина вертикального стержня, тем значение критической силы меньше (гиперболическая зависимость).
3. Чем больше длины горизонтальных стержней, тем значение критической силы меньше.
4. Чем больше жесткость горизонтальных стержней, тем значение критической силы больше.

Литература

1. Иванов, С. П. Строительная механика. Ч. III. Устойчивость, динамика и предельное состояние: курс лекций / С. П. Иванов, О. Г. Иванов. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2010. – 108 с.

УДК 539.376

Габдуллин М. Р., Иванов С. П.

Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ БАЛОК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Аннотация. Рассматривается методика расчета физически нелинейных балок при больших прогибах.

Ключевые слова: физическая нелинейность, большие прогибы.

В большепролетных конструкциях могут возникать большие перемещения, а при действии значительных нагрузок диаграмма деформирования может быть нелинейной.

Учитываем большие прогибы w , используя точное выражение кривизны в первом приближении:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{EIw_{xx}}{(1+w_x^2)^{3/2}} \approx EIw_{xx} \left(1 - \frac{3}{2} w_x^2 \right), \quad (1)$$

где EI – изгибная жесткость балки, $w_{xx} = \frac{d^2w}{dx^2}$, $w_x = \frac{dw}{dx}$.

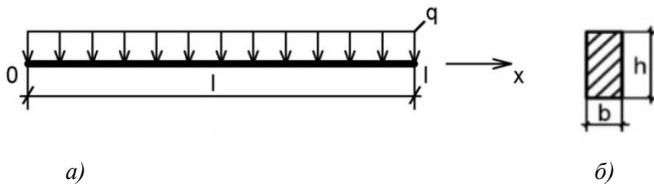


Рис. 1. Схема балки без опор (а); поперечное сечение балки (б)

Выражение (1) получено путем разложения в биномиальный ряд. При выводе дифференциального уравнения изгиба учитываем только один член ряда.

Принимаем зависимость между напряжениями σ и деформациями ε в виде кубической параболы:

$$\sigma = E\varepsilon - E_1\varepsilon^3, \quad (2)$$

где E и E_1 – постоянные, принимают по экспериментальным данным.

Составим выражение полной энергии деформирования балки:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^x \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\varepsilon} \sigma dz - qw \right) dx = \int_0^x \left(\frac{EI}{2} w_{xx}^2 (1 - 3w_x^2 + \frac{9}{4} w_x^4) - \right. \\ \left. - \frac{E_1 bh^5}{320} w_{xx}^4 \left[1 + 9w_{xx}^4 + \frac{91}{16} w_{xx}^8 + 2(-3w_x^2 + \frac{9}{4} w_x^4 - \frac{27}{16} w_x^6) \right] - qw \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее определяем экстремальное значение Π , используя уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial F}{\partial w} = 0, \quad (4)$$

где F – подынтегральная функция (3).

Раскрывая выражение (4), получаем нелинейное дифференциальное уравнение равновесия физически нелинейной балки при больших прогибах:

$$EIw_{xxxx} = q + \Phi_{(г.н. и ф.н.)}, \quad (5)$$

где $\Phi_{(г.н. и ф.н.)}$ – учитывает геометрическую и физическую нелинейности балки.

Уравнение (4) необходимо решать совместно с граничными условиями на концах балки. Интегрирование уравнения можно проводить численно или с помощью рядов.

В качестве примера исследуется однопролетная балка с шарнирными опорами (рис. 1, а) в точках 0 и 1 на действие равномерно распределенной нагрузки q .

Граничные условия: 1) при $x = 0$ $w(0) = w_{xx}(0) = 0$;

2) при $x = l$ $w(l) = w_{xx}(l) = 0$.

Решаем задачу в рядах в первом приближении, согласно граничным условиям принимаем прогиб w :

$$w = w_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), после ортогонализации получаем нелинейное алгебраическое уравнение относительно прогибов при $\pi/l=0,5$; $h/l=0,05$:

$$Q(w_1) = 9w_1 - 15(w_1)^2 + 6(w_1)^3 - \frac{E_1}{E} [33(w_1)^2 + 30(w_1)^3]. \quad (7)$$

При соотношении $E_1/E = 10^3$ построены графики зависимости нагрузка-прогиб (рис. 2).

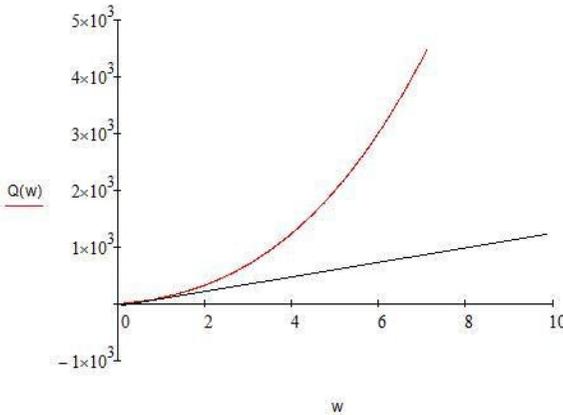


Рис. 2. Графики зависимости нагрузка-прогиб

Выводы

1. Из графиков видно, что кривая значительно отклоняется от прямой, полученной по линейной теории.

2. Отклонение кривой вверх от прямой показывает, что при данных параметрах балки геометрическая нелинейность значительно превалирует над физической нелинейностью.

Гладырев Д. С., Дегтярёв В. Л., Иванов С. П.
 Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЕТ ДВУХСТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Аннотация. В данной работе проводится расчет двухстержневой системы на растяжение при различных углах наклона между ними с учетом физической и геометрической нелинейности.

Ключевые слова: двухстержневая система, физическая и геометрическая нелинейность.

В настоящей работе установим зависимость перемещения узла двухстержневой системы от действующей нагрузки при учете физической и геометрической нелинейности. Получим результаты при изменении угла α между стержнями.

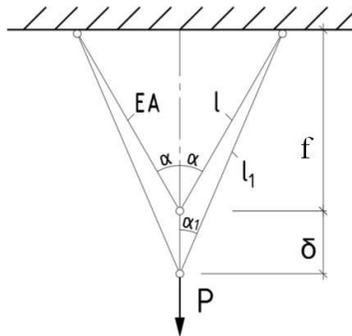


Рис. 1. Расчетная схема

Вводим следующие обозначения [1]: $\xi = \delta/l$; $P^* = P/EA$; E – модуль упругости; A – площадь поперечного сечения стержней.

Для линейной задачи получим зависимость перемещений ξ от нагрузки P^* :

$$P^* = 2 \xi \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

Для геометрически нелинейной задачи учтем изменение угла α при деформации системы. В результате расчета получаем:

$$P^* = 2(\cos\alpha + \xi) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\xi \cos\alpha + \xi^2}} \right). \quad (2)$$

Учет физической нелинейности. Принимаем зависимость:

$$\sigma = E\varepsilon - E_1\varepsilon^3, \quad (3)$$

где σ – нормальное напряжение; ε – линейная деформация; E и E_1 – постоянные.

Получаем следующее уравнение:

$$P^* = 2 \left(\xi - \frac{E_1}{E} \xi^3 \cos^2 \alpha + \xi \right) \cos^2 \alpha. \quad (4)$$

Совместный учет физической и геометрической нелинейности:

$$P^* = 2 \left[(\sqrt{1 + 2\xi \cos\alpha + \xi^2} - 1) - \frac{E_1}{E} (\sqrt{1 + 2\xi \cos\alpha + \xi^2} - 1)^3 \right] \times \left(\frac{\cos\alpha + \xi}{\sqrt{1 + 2\xi \cos\alpha + \xi^2}} \right). \quad (5)$$

Пунктирной линией (рис. 2, 3, 4) представлены кривые с учетом различных видов нелинейности, а сплошной линией – результаты линейной задачи.

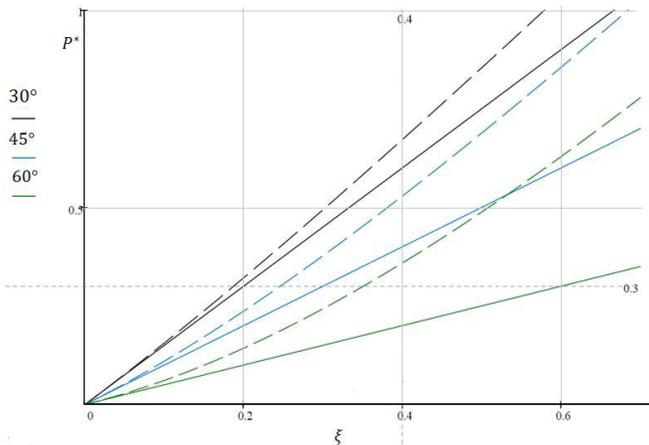


Рис. 2. С учетом геометрической нелинейности

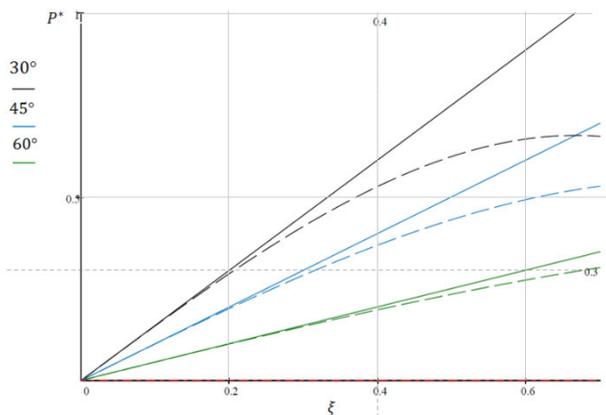


Рис. 3. С учетом физической нелинейности ($E_1/E=10^3$)

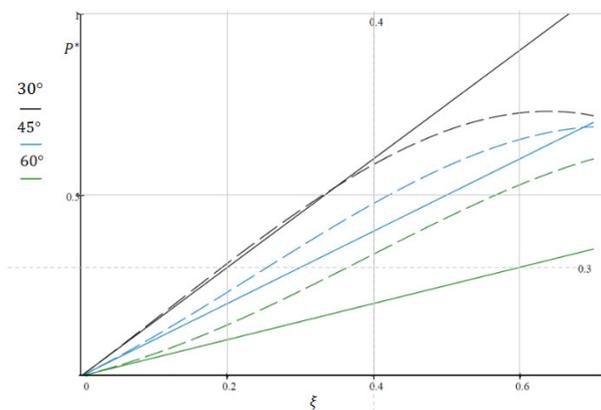


Рис. 4. С учетом физической ($E_1/E=10^3$) и геометрической нелинейностей

Из графиков видно: 1) влияние геометрической нелинейности увеличивается, а физической нелинейности уменьшается с увеличением угла; 2) при совместном учете двух видов нелинейности с большей степенью проявляется геометрическая нелинейность.

Литература

1. Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

Зыкова А. А., Иванов С. П.

Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЕТ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

Аннотация. В данной работе рассматривается методика расчета комбинированных статически определимых и неопределимых систем по предельному состоянию.

Ключевые слова: комбинированные системы, предельное состояние.

Комбинированные системы – конструкции, состоящие из нескольких систем (балок, рам, ферм, арок и т. д.), соединенных между собой. Такие системы широко применяются в строительстве, машиностроении, авиастроении и в других отраслях [1].

1. Рассмотрим статически определимую комбинированную систему (рис. 1). Особенностью рассматриваемой конструкции является наличие в ней основной балки, перекрывающей пролет, работающей преимущественно на изгиб, и дополнительной конструкции, которая усиливает эту балку и элементы которой работают как элементы ферм, т. е. сжаты или растянуты; площади A поперечных сечений этих элементов принимаем одинаковыми. Данная система превратится в механизм, если один из стержней (фермы) достигнет предельного состояния $N_{пр} = \sigma_T A$.

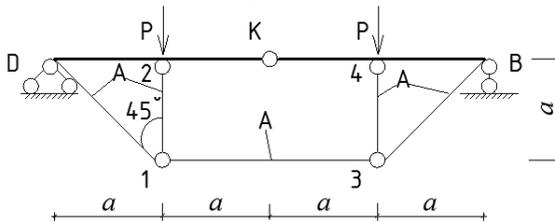


Рис. 1

Рассматривая равновесие правой части системы, определим усилие в стержне 1-3.

$$\sum M_K^{np} = 0; Pa - R_B 2a + N_{1-3} a = 0; N_{1-3} = P.$$

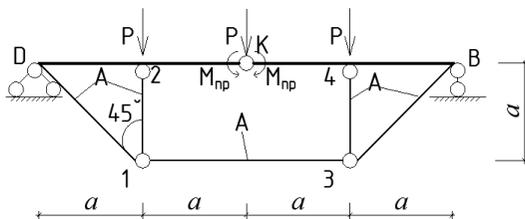


Рис. 4

$$R_D = R_B = 1,5P;$$

$$\sum M_k^{лев} = 0; -M_{пр} - 0,7N_{пр}a - Pa + R_D a = 0;$$

$$P_{пр} = \frac{M_{пр} + 0,7N_{пр}a}{2a}. \quad (3)$$

Для оценки изменения $P_{пр}$ рассмотрим металлическую двутавровую балку I 20 с $W_{пл} = 208 \text{ см}^3$ и трубчатые стержни фермы с площадью поперечного сечения $A = 19,63 \text{ см}^2$, материал Ст.3, $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$.

Определим

$$N_{пр} = \sigma_T \cdot A = 24 \cdot 19,63 = 471,12 \text{ кН}; M_{пр} = \sigma_T \cdot W_{пл} = 24 \cdot 208 \cdot 10^{-2} \text{ кНм}.$$

По формулам (1), (2) и (3) получим $P_{пр1} = 329,8 \text{ кН}$, $P_{пр2} = 379 \text{ кН}$, $P_{пр3} = 189,9 \text{ кН}$.

Выводы.

1. Из результатов расчета видно, что на величину предельной нагрузки значительно влияет $N_{пр}$.
2. Величина предельной нагрузки при одинаковых условиях значительно больше в статически неопределимой системе.
3. При увеличении числа нагрузок величина предельной нагрузки значительно снижается.

Литература

1. Иванов, С. П. Строительная механика. Часть III. Устойчивость, динамика и предельное состояние: курс лекций / С. П. Иванов, О. Г. Иванов. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2010. – 108 с.

Иванова Е. С., Иванов С. П.
 Марийский государственный университет,
 Поволжский государственный технологический университет

АППРОКСИМАЦИЯ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СКЕЛЕТНЫХ МЫШЦ

Аннотация. Рассматривается вопрос деформирования скелетных мышц человека.

Ключевые слова: деформация, мышцы, моделирование.

Мышцы человека имеют разную длину. В сгибании голени участвуют мышцы длиной 20-29 см. Самая длинная мышца имеет длину от 41 см до 48 см и принимают участие в сгибании ноги в коленном суставе. Длина отдельных волокон мышц изменяется в пределах от 7 см до 18 см [1].

Невозбужденная (пассивная) мышца обладает значительной гибкостью и имеет достаточную деформативность. При деформации, составляющей 0,1, жесткость мышцы резко возрастает, и для дальнейшего увеличения деформации необходимо прикладывать большие усилия. Это происходит из-за изменения свойств мышцы. Зависимость между напряжениями σ и деформациями ϵ становится нелинейной.

Работу параллельных упругих составляющих пассивной мышцы можно смоделировать с помощью резиновых жгутов I, II, III одинаковой длины (рис. 1, а). Жгуты I, II, III воспринимают усилия P через гибкие нити 1, 2, 3 разной длины. Жесткость жгута I равна c_1 , а жесткости жгутов II и III равны $c_1/2$.

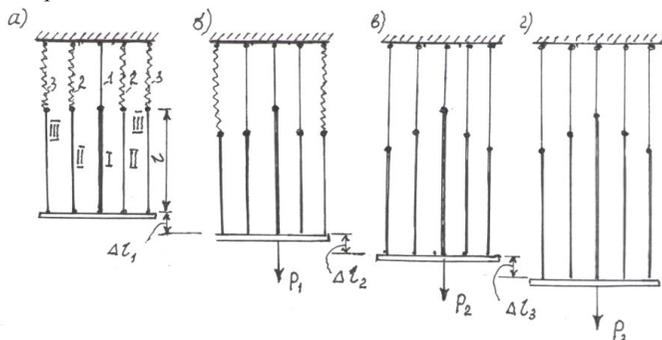


Рис. 1. Схема модели скелетной мышцы (а); растягивается жгут I (б); растягиваются жгуты I и II (в); растягиваются жгуты I, II и III (г)

Диаграмма удлинения Δl жгутов в зависимости от действующей нагрузки P , изменяющейся в пределах от 0 до P_3 , представлена на рис. 1.

Принцип работы модели следующий. От действия силы P сначала включается в работу жгут I (рис. 1, б). На рис. 2 этому соответствует первый прямолинейный участок (I). При увеличении нагрузки P происходит передача усилий через нити 2 на жгуты II (рис. 1, в). Растягиваются жгуты I и II, на диаграмме (рис. 2) этому соответствует второй прямолинейный участок (II). На третьем этапе при дальнейшем увеличении нагрузки P включаются в работу жгуты III (рис. 1, г). На диаграмме этому соответствует прямолинейный участок III (рис. 2).

Экспериментальную ломаную диаграмму растяжения (рис. 2, а) можно аппроксимировать в виде полинома второго порядка через зависимость между напряжением σ и деформацией ε :

$$\sigma = E\varepsilon + E_1\varepsilon^2, \quad (1)$$

или полиномом третьего порядка

$$\sigma = E\varepsilon + E_1\varepsilon^3, \quad (2)$$

где E и E_1 – постоянные, которые можно определить, используя экспериментальную диаграмму (рис. 2).

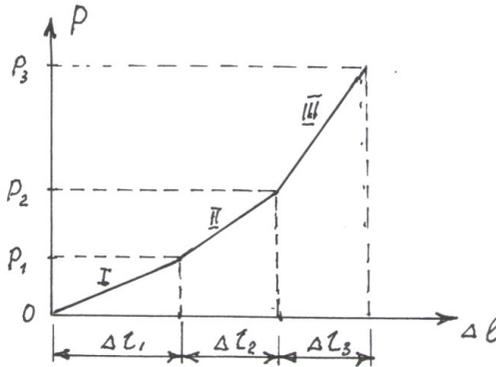


Рис. 2. Экспериментальная диаграмма зависимости удлинения Δl жгутов от действующей нагрузки P

С помощью формул (1) и (2) график зависимости удлинения Δl от действующей нагрузки P (рис. 2) можно аппроксимировать в виде кривой.

Литература

1. Бегун, П. И. Биомеханика: учебник для вузов / П. И. Бегун, Ю. А. Шукейло. – СПб.: Политехника, 2000. – 468 с.

Иванов С. П., Иванова А. С., Иванова Е. С.

Марийский государственный университет

Поволжский государственный технологический университет

УСТОЙЧИВОСТЬ БОЛЬШЕБЕРЦОВОЙ КОСТИ ГОЛЕНИ

Аннотация. Рассматривается вопрос устойчивости большеберцовой кости голени человека.

Ключевые слова: устойчивость, большеберцовая кость.

Исследование устойчивости костей голени (большеберцовой и малоберцовой) необходимо проводить в связи с тем, что при небольшой поперечной и достаточно большой продольной нагрузках может происходить потеря устойчивости, вследствие чего могут возникнуть трещины и переломы костей. Еще более опасным является случай, когда ноги человека имеют О-образное, либо Х-образное строение. Особенно большие нагрузки испытывают кости спортсменов (тяжелоатлетов, легкоатлетов и т. д.) [1].

Рассмотрена статическая устойчивость большеберцовой кости. Расчетная схема составлена в виде стержня с наличием начальной погиби (рис. 1).

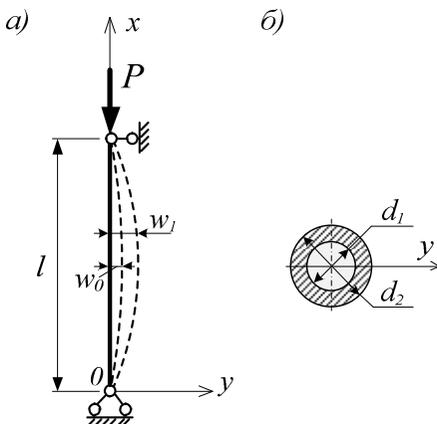


Рис. 1. Расчетная схема большеберцовой кости (а); поперечное сечение (б)

Приняты следующие обозначения: $w_0 = w_0(x)$ – начальное несовершенство стержня (кости); $w_1 = w_1(x)$ – полный прогиб.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид:

$$EI \frac{d^4(w_1 - w_0)}{dx^4} + P \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

где EI – жесткость поперечного сечения стержня (кости) на изгиб.

Задана форма потери устойчивости:

$$w_0 = f_0 \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad w_1 = f_1 \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

где f_0 – стрела начального прогиба, f_1 – стрела полного прогиба.

Подставляя (2) в (1), после преобразований получаем формулу:

$$f_1 = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{m^2 P_3}}, \quad (3)$$

где $P_3 = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2}$ – Эйлера критическая сила.

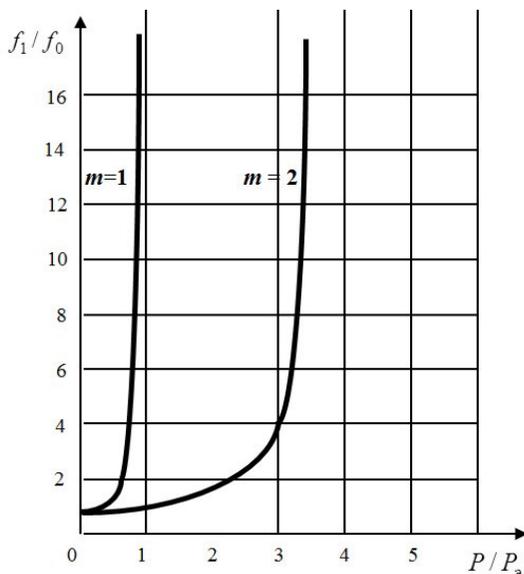


Рис. 2. Графики зависимости стрелы прогиба f_1 от соотношения P/P_3 , при числе полуволн $m = 1, m = 2$

На основе формулы (3) построены графики зависимости стрелы прогиба f_1 от соотношения P/P_3 (рис. 2).

Формула (3) позволяет оценить влияние различных параметров на стрелу прогиба.

Из графиков зависимости (рис. 2) видно:

1) на величину стрелы прогиба f_1 значительное влияние оказывает начальное несовершенство стержня (отклонение большеберцовой кости от прямолинейной формы);

2) величина f_1 быстрее возрастает (с увеличением соотношения P/P_0) при числе полуволн $m = 1$;

3) увеличение стрелы прогиба f_1 приводит к резкому возрастанию изгибающего момента, вследствие чего может произойти разрушение большеберцовой кости.

Литература

1. Бегун, П. И. Биомеханика: учебник для вузов / П. И. Бегун, Ю. А. Шукейло. – СПб.: Политехника, 2000. – 468 с.

УДК 539.376

Михайлова Н. Ю.

Научный руководитель: Рынковская М. И., канд. техн. наук, доцент
Российский университет дружбы народов

АНАЛИЗ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ФОРМЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

***Аннотация.** Представлено комплексное исследование оболочек вращения, применяемых в строительстве и архитектуре, кратко рассмотрены некоторые классификации данных конструкций, достоинства и недостатки. Проведен предварительный аналитический расчет строительной конструкции в форме сферической оболочки. Проведен сравнительный анализ нескольких типов оболочек вращения с выбором наиболее эффективно работающей формы для заданных условий.*

***Ключевые слова:** оболочка, покрытие, сфера, сравнительный расчет.*

Каждый день инженеры и проектировщики сталкиваются с множеством различных задач: какой вид конструкции использовать для данного сооружения, какой материал применить и как снизить его количество. Еще с давних времен люди пытаются разработать такие конструкции, которые будут простыми в выполнении, экономически выгодными и надежными. Для сооружений с большими пролетами применяют про-

странственные покрытия, которые требуют особенного подхода к проектированию, расчету и реализации.

Тонкостенная оболочка представляет собой изогнутую поверхность, которая, несмотря на минимальную толщину и вес, обладает большой несущей способностью [1]. Самые первые конструкции такого вида появились еще в Древнем Риме (рисунок), с тех пор их совершенствовали, упрощали в использовании, находили альтернативные методы изготовления. В настоящее время главными преимуществами [2] оболочек, помимо архитектурной выразительности, является экономия материала.

Наиболее простыми по форме видами оболочек являются сферические пространственных конструкций могут служить оболочки вращения, которые уже давно известны инженерам и проектировщикам, и многократно применялись архитекторами. Самой простой формой является купол. На рис. 1 показан Храм Пантеон, который был покрыт кирпичным куполом диаметром 43 м и толщиной 2 м.



Пантеон в Риме

Купола бывают в форме сферических, конических, эллиптических, параболических и гиперболических поверхностей вращения. Обзор литературы показал, что в настоящее время все еще ведутся исследования оболочек вращения. В статье [3] представлен большой современный обзор оболочек в форме параболоида вращения, в котором представлены некоторые новые сведения по расчету параболических оболочек на прочность, определению их частот собственных колебаний и примеры их применения в строительстве в 1900-2017 годах.

Разделение оболочек по типам чаще всего проводят следующим образом: по форме перекрываемой площади; по конструктивным признакам; по способу возведения и изготовления; по очертанию срединной поверхности оболочки; по преимущественно используемому материалу.

В настоящее время оболочки очень распространены, и теоретические основы изучены довольно глубоко. Предложенные теории, как

правило, применимы к оболочкам из идеальных материалов: упругого, упругопластического, упруговязкого, поэтому в проектировании расчеты оболочек ведутся с подходом как к уникальным конструкциям. В зависимости от вида, назначения, климата и других факторов различают оболочки из железобетона, бетона, металла, древесины, стали, пластика, тканых и полимерных материалов. Интересно происходящее в последнее время возвращение к старым материалам, например, к дереву, которое уменьшает расход металла, обладает хорошими теплоизолирующими свойствами и снижает вес конструкции [4].

В целом оболочки вращения являются одними из наиболее распространенных видов покрытий. Помимо того, что уже рассчитано и придумано, ведется разработка новых, более рациональных и совершенных моделей конструкций. Например, в статье [5] приведен пример применения зонтичной оболочки в покрытии части спортивного комплекса. В рамках научной работы автором также планируется запроектировать сферическую оболочку с учетом результатов расчета нескольких форм оболочек вращения.

Интересно, что помимо известных форм оболочек вращения существуют и так называемые неканонические формы оболочек. В работе [6] рассмотрены некоторые неканонические оболочки вращения, для которых существуют только теоретические предложения и рекомендации для внедрения, представленные в публикациях, но еще нет практического внедрения. В качестве продолжения представленного исследования после завершения работы по анализу оболочки вращения канонической формы автору было бы интересно попробовать разобраться с оболочкой вращения неканонической формы. Как показано в [6], «в настоящее время формируется новый стиль в архитектуре – параметрическая архитектура, которая базируется на аналитических методах задания поверхностей, математическом и компьютерном моделировании. Широкое применение получают компьютерные технологии, давшие проектировщикам возможность генерировать более сложные поверхности». Все это вдохновляет на продолжение исследования оболочек вращения разных форм и с распространением аддитивных технологий делает данные исследования актуальными и современными.

Литература

1. Демина, А. В. Здания с большепролетными покрытиями: учебное пособие / А. В. Демина. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 88 с.
2. Наширалиев, Ж. Т. Трудности проектирования и строительства пространственных тонкостенных оболочек / Ж. Т. Наширалиев, А. Т. Каргаева

[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/v/trudnosti-proektirovaniya-i-stroitelstva-prostranstvennyh-tonkostennyh-obolochek>.

3. Кривошапко, С. Н. К вопросу о применении параболических оболочек вращения в строительстве в 2000-2017 годах / С. Н. Кривошапко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 4-14.

4. <https://helpiks.org/6-49694.html>.

5. Козырева, А. А. Зонтичные оболочки для покрытия спортивного центра / А. А. Козырева, М. И. Рынковская, Е. М. Тупикова // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер.: Инженерные исследования. – 2017. – Т. 18. № 1. – С. 70-78.

6. Кривошапко, С. Н. Оболочки вращения неканонических форм / С. Н. Кривошапко // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2018. – № 7(715). – С. 66-79.

УДК 539.376

Родникова А. В., Иванов С. П.

Поволжский государственный технологический университет

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БАЛОК ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Исследуется влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние балок при различных граничных условиях.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность, балка, напряженно-деформированное состояние.

Под геометрической нелинейностью понимают нарушение линейной зависимости между нагрузкой и перемещениями, вызванное возникновением дополнительных усилий при деформировании конструкции или отдельных ее элементов [1].

Геометрически нелинейные системы довольно часто встречаются в строительстве. К ним можно отнести большепролетные конструкции, мосты, вантовые конструкции и многие другие.

В оценке напряженно-деформированного состояния геометрически нелинейных систем большую роль играет способ закрепления элементов [2].

Рассмотрим стержень, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой. При учете продольной силы и точного выражения кривизны продольная деформация первого приближения имеет вид:

$$\varepsilon = u_x + \frac{1}{2} w_x^2 - z \frac{w_{xx}}{\left(1 + w_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx u_x + \frac{1}{2} w_x^2 - z w_{xx} \left(1 - \frac{3}{2} w_x^2\right). \quad (1)$$

Решая задачу энергетическим методом, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях (w – прогиб, u – продольные перемещения):

$$EI_y w_{xxxx} + q = \Phi(u_x, u_{xx}, w_x, w_{xx}, \dots); \quad (2)$$

$$u_{xx} + w_x w_{xx} = 0,$$

где $\Phi(u_x, u_{xx}, w_x, w_{xx}, \dots)$ – нелинейная часть уравнения;

$$w_x = \frac{dw}{dx}, w_{xx} = \frac{d^2 w}{dx^2}, \dots, u_x = \frac{du}{dx}, \dots$$

Систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (2) можно решить численно или приближенно в рядах совместно с граничными условиями.

Рассмотрим возможные варианты закрепления и условия на концах:

- 1) при $x=0$: $w(0)=0$; $u(0)=0$; $w_{xx}(0)=0$;
при $x=l$: $w(l)=0$; $u(l)=0$; $w_{xx}(l)=0$.



Рис. 1. Шарнирно закрепленная балка

- 2) при $x=0$: $w(0)=0$; $u(0)=0$; $w_x(0)=0$;
при $x=l$: $w(l)=0$; $u(l)=0$; $w_x(l)=0$.

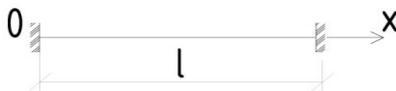


Рис. 2. Балка с защемленными концами

Решаем задачу в первом приближении в рядах. Задаемся функциями перемещений для двух случаев закрепления концов стержня:

$$w = w_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad u = u_1 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (3)$$

$$w = w_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right); \quad u = u_1 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) полностью удовлетворяют граничным условиям. Подставляя аппроксимирующие функции (3) и (4) и их производные в систему уравнений (2) и ортогонализируя, получим нелинейные алгебраические уравнения зависимости приложенной нагрузки от прогибов для балок при двух случаях опирания концов:

$$- \text{при шарнирном опирании } q = 8EI \frac{\pi^4}{l^4} w_1 + k_1 w_1^3 + k_2 w_1^5; \quad (5)$$

$$- \text{с защемленными концами } q = 0,785EI \frac{\pi^4}{l^4} w_1 + k_3 w_1^3 + k_4 w_1^5. \quad (6)$$

По уравнениям (5) и (6) построены графики зависимости нагрузка-прогиб для центральной части пролета балок (рис. 3).

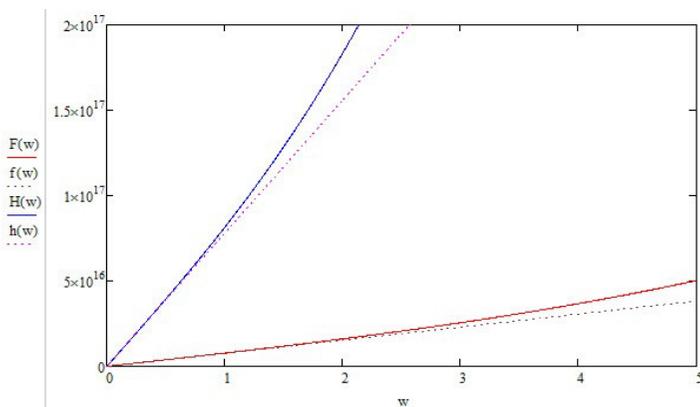


Рис. 3. Графики зависимости нагрузка – прогиб для балки: с защемленными концами; с шарнирным опиранием

Из графиков видно, что стержень с защемленными краями является более жестким по отношению к стержню с шарнирным закреплением. При одинаковой нагрузке прогибы стержня с защемленными краями значительно меньше. Также следует отметить, что при малых нагрузках нелинейную часть уравнения можно отбросить, так как она не дает существенной разницы и погрешность минимальна.

Литература

1. Чирас, А. А. Строительная механика / А. А. Чирас. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
2. Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

Филимонова А. А., Иванов С. П.
 Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ ПЛИТ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ В. З. ВЛАСОВА

Аннотация. В данной работе рассматривается расчет неразрезных плит вариационным методом В. З. Власова.

Ключевые слова: неразрезные плиты, вариационный метод.

Неразрезные пролетные строения имеют ряд особенностей, благодаря которым они находят все более широкое применение в современной практике. Уменьшение расчетных положительных моментов и прогибов позволяет уменьшить высоту плит по сравнению с разрезными пролетными строениями. Линия прогиба неразрезных плит под нагрузкой имеет плавное очертание. Если для их расчёта использовать метод конечных элементов (МКЭ), то в «ручном» виде он является очень громоздким. Следовательно, для подобного расчета лучше применять вариационный метод В. Е. Власова, общее уравнение которого имеет следующий вид [1]:

$$\sum_i [a_{ji}W_i^{IV} - 2b_{ji}W_i'' + c_{ji}W_i'] - Q_j = 0, \quad (1)$$

где $a_{ji} = \int_x f_j f_i dx$; $c_{ji} = \int_x f_j'' f_i'' dx$; $b_{ji} = \int_x f_j' f_i' dx - \frac{V}{2} [f_j f_i' + f_j' f_i]$;
 ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$),

нагрузка Q_j равна: $Q_j = \frac{1}{D} \int_x q f_j dx$.

Координатные функции f_j и f_i задаем заранее по физическому смыслу задачи. Обобщенные перемещения W_i определяются из решения дифференциальных уравнений (1).

Рассмотрим пример расчета трёхпролётной неразрезной плиты (рис. 1) от действия равномерно распределенной нагрузки в среднем пролете. Плита по контуру опирается шарнирно.

Для составления координатных функций можно использовать линии прогиба, полученные из расчета трехпролётной неразрезной балки от действия в среднем пролете равномерно распределенной нагрузки (рис. 1, б). Расчет балки достаточно просто провести, используя метод перемещений. Так как пролеты 1 и 3 (слева направо) симметричны, то

уравнения прогибов для них будут зеркально одинаковы; для каждого задаемся, что $x \in [0; l]$.

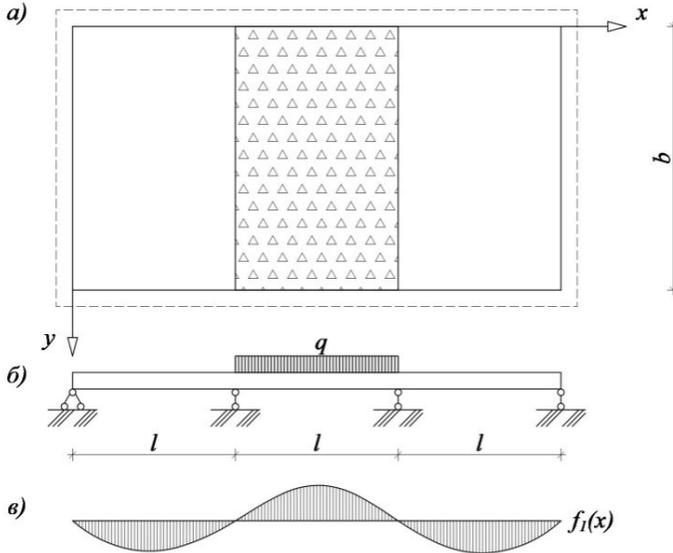


Рис. 1. а) схема плиты в плане; б) поперечное сечение плиты с действующей нагрузкой; в) координатная функция прогибов

Расчет плиты выполняем в первом приближении. Прогиб принимаем в следующей форме:

$$w(x, y) = W_1(y) \cdot f_1(x). \tag{2}$$

Уравнение (1) принимает следующий вид:

$$a_{11}W_1^{IV} - 2b_{11}W_1'' + c_{11}W_1 = Q_1. \tag{3}$$

Коэффициенты уравнения (3) определены по вышеуказанным формулам при $i = j = 1$. Координатная функция $f_1(x)$ (рис. 1, в) состоит из выражений:

$$f(x) = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \text{ — для 1 и 3 пролета;}$$

$$f(x) = \frac{x}{l} \left(-1,5 \frac{x}{l} + 5 \frac{x^2}{l^2} - 2,5 \frac{x^3}{l^3} - 1\right) \text{ — для 2 пролета.}$$

Если сравнивать прогибы w точек центральной части пластины в зависимости от отношения ширины пролета b к длине элемента l , то видно, что при определенном их соотношении (примерно 10-14) величина

w стремится к постоянному значению. Следовательно, пластина будет вырждаться в неразрезную балку (см. рис. 2).

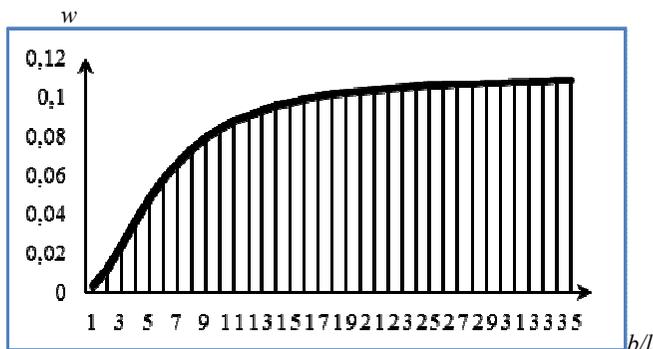


Рис. 2. Зависимость между прогибом w центральной точки плиты и соотношением b/l

Из результатов расчета следует:

1. вариационный метод Власова позволяет достаточно точно рассчитывать неразрезную плиту даже в первом приближении;
2. при определенном соотношении размеров b/l пластинку можно рассчитывать, как неразрезную балку.

Литература

1. Иванов, С. П. Изгиб прямоугольных пластин: учебное пособие / С. П. Иванов. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. – 96 с.

УДК 539.3

Чернышова О. И., Лоскутов Ю. В., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

РАСЧЕТ ШАХТНОЙ ЛЕСТНИЦЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация. Построена расчетная схема шахтной лестницы. Определены основные виды действующих нагрузок. Аналитически и расчетом МКЭ получены усилия в опорах и элементах сооружения. Определены сечения и материалы фермы, при которых конструкция проходит по ИПС, 2ПС и МУ

Ключевые слова: металлические конструкции, деформации, напряжения, МКЭ, Лира-САПР 2013.

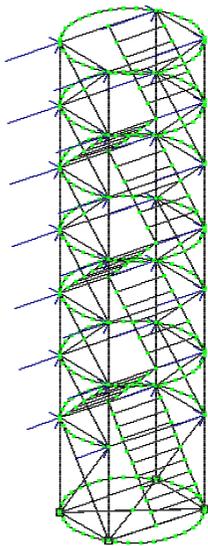


Рис. 1. Схема лестницы

подбор сечений элементов лестницы.

Расчет проведен при помощи программного комплекса ЛИРА-САПР 2013 [1] по нормам СП16.13330.2011 [2] и СП20.13330.2016 [3]. Для вычислений использованы конечные элементы КЭ10, КЭ56 с 6 степенями свободы.

Универсальный стержневой КЭ изображен на рис. 2. Стержень имеет местную правую декартову систему координат X_1, Y_1, Z_1 , в которой определяются усилия и задается местная нагрузка. Ось X_1 направлена по продольной оси стержня от начала (первый узел) к концу (второй узел). Оси Y_1 и Z_1 являются главными центральными осями инерции. Ось Z_1 всегда направлена в верхнее полупространство. По умолчанию полагается, что у произвольно ориентированных стержней ось Y_1 параллельна горизонтальной плоскости

Лестница шахтного типа – это вертикальная конструкция, которая состоит из секций, поручней, площадок и ограждений. Такое сооружение крепится двумя и более опорными стойками и позволяет обеспечить подъем или спуск в пределах ограниченного пространства. Лестница обеспечивает безопасный подъем для проведения различного рода работ: например, обслуживание резервуаров или ремонт и управление строительной техники. Поэтому задача оценки прочности и жесткости ферм представляется *достаточно актуальной*.

Целью работы является оценка прочности и жесткости шахтной лестницы при ветровой и снеговой нагрузках, учете собственного веса. Предусмотрены разработка расчетной схемы и выбор конечного элемента; расчетная оценка прочностных и жесткостных свойств конструкции; нахождение усилий на фундамент лестницы и в крепежных элементах;

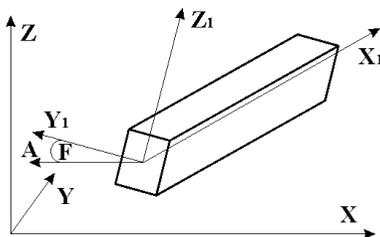


Рис. 2. Универсальный КЭ

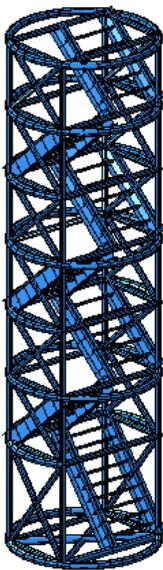


Рис. 3. 3D вид конструкции

нагрузкой, собственно весе. Найдены усилия на фундамент и в крепежных элементах. Определены сечения, при которых конструкция проходит по 1ПС, 2ПС и МУ.

сти XOY глобальной системы координат, а у вертикальных стержней – параллельна оси Y глобальной системы координат и направлена в противоположную сторону.

Одноузловой КЭ 56 применяется для введения упругих связей вдоль и/или вокруг глобальных или локальных осей координат узла. С помощью этого КЭ можно смоделировать полное защемление узла. Усилия, полученные в этом КЭ, соответствуют реакциям в узле.

Конструкция передает нагрузку на фундамент при помощи анкерных болтов. Поэтому особенно важно при расчете узнать:

- вертикальную силу на одну опору;
- усилие среза на одной опоре;
- усилие отрыва в анкерном болте;
- усилие затяжки анкерного болта.

Нагрузки включают собственный вес. Полученные в результате расчета МКЭ напряжения и деформации в элементах сопоставлены с допустимыми значениями.

Вывод. Построена расчетная схема шахтной лестницы с заданной ветровой, снеговой

Литература

1. Городецкий, А. С. Компьютерные модели конструкций / А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров. – Киев: Факт, 2009. – 344 с.
2. СП 63.13330.2011. Свод правил. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – М.: Минрегион России, 2012. – 161 с.
3. СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* (с Изменением № 1).

УДК 515.2

Домрачева С. С., Щекотова М. И.
Научный руководитель: Новоселов Н. Т., доцент
Поволжский государственный технологический университет

ОБЪЯСНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАДОКСОВ В ВОСПРИЯТИИ ФОРМЫ ПРЕДМЕТОВ

Аннотация. Представлено объяснение, почему человеческий глаз воспринимает окружающие нас предметы в искаженном виде.

Ключевые слова: позиционные задачи, метрические задачи, алгоритмы решения.

Хорошо известно, что зрительное восприятие формы предметов во многом отличается от настоящего. Действительно, когда мы смотрим на прямолинейный участок железнодорожного полотна, то видим, что рельсы вдали сходятся в одной точке (рис. 1), хотя расстояние между ними неизменное; прямоугольный фасад здания воспринимается нами как трапециевидный (рис. 2) и т. д.

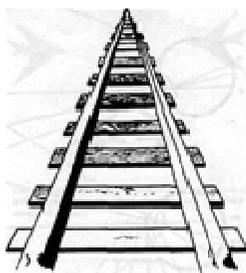


Рис. 1



Рис. 2

Так как аппарат зрения человека в геометрическом отношении аналогичен аппарату центрального проецирования, то несоответствие между истинной и зрительно воспринимаемой формами предмета можно объяснить, проанализировав получение перспективы прямой линии и перспективы параллельных прямых.

Представим, что нам необходимо получить изображение отрезка прямой AB на плоскости K при условии, что центр проекций точка S (рис. 3). На плоскости проекций K отрезок будет представлен проекцией $A^k B^k$ (рис. 4). Если отрезок AB продолжить в сторону плоскости K (на рис. 5 точки 1 и 2), то изображение этих точек будет на продолжении проекций $A^k B^k$ – точки $1^k, 2^k$ (рис. 5). При дальнейшем продолжении прямой наступит такой момент, когда точка на прямой и ее изображение на плоскости K совпадут в некоторой точке N (см. рис. 5). Подобную точку в теории перспективы принято называть началом прямой.

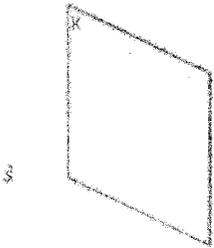


Рис. 3

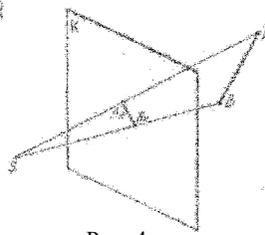


Рис. 4

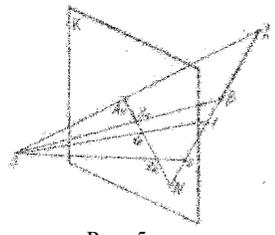


Рис. 5

Если же отрезок прямой AB продолжить в сторону от плоскости (рис. 6), то проекции ее точек 3 и 4 будут находиться на продолжении проекции отрезка $A^k B^k$ (точки $3^k, 4^k$). Очевидно, что продолжение отрезка за точку 4 приведет к дальнейшему удлинению его проекции. При этом последний луч будет давать изображение бесконечно удаленной точки прямой, так как он должен идти из точки S параллельно отрезку AB (рис. 7). Полученную при этом точку F принято называть концом прямой.

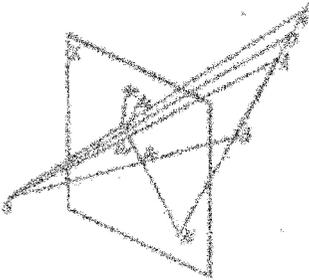


Рис. 6

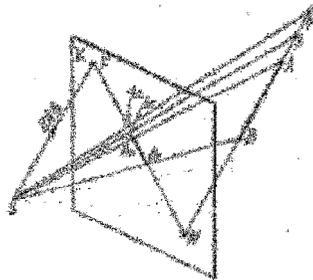


Рис. 7

Таким образом, перспектива прямой будет определяться двумя точками: N – началом прямой и F – концом прямой (рис. 8).

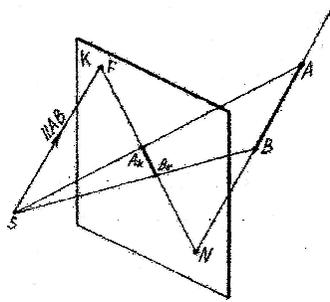


Рис. 8

Зная, как получается чертеж прямой линии, проанализируем получение перспективного изображения параллельных прямых a и b (рис. 9). Продолжая прямую a до пересечения с плоскостью K получим точку N^a – начало прямой a (рис. 10). Для получения ее конечной точки F^a необходимо из точки S провести прямую параллельную прямой a (рис. 11). Таким образом, перспектива прямой a – a^k определится линией $N^a F^a$ (рис. 12). Если проделать подобные действия с прямой b (рис. 13), то окажется, что вследствие параллельности прямых линий a и b , их конечные точки совпадут (рис. 14), а, следовательно, проекции параллельных прямых будут пересекаться в одной точке F , которую принято называть точкой схода.

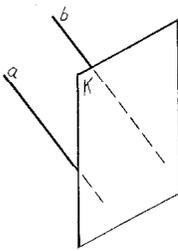


Рис. 9

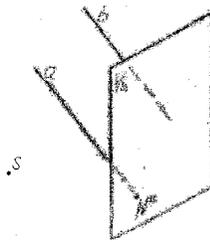


Рис. 10

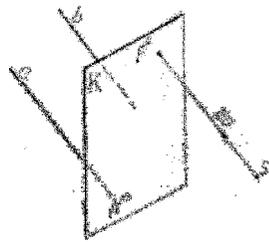


Рис. 11

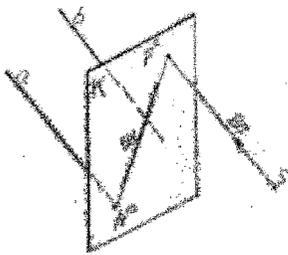


Рис. 12

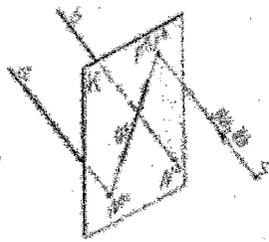


Рис. 13

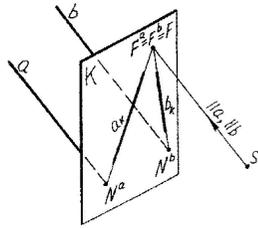


Рис. 14

Наличие точки схода параллельных прямых объясняет, почему человеческий глаз воспринимает окружающие нас предметы в искаженном виде.

Литература

1. Начертательная геометрия: учеб. для строит. специальностей вузов / Н. Н. Крылов [и др.]; под ред. Н. Н. Крылова. – Изд. 9-е, стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 223 с.

УДК 515.2

Исупова И. А., Комарова А. К.

Научный руководитель: Фоминых И. А., доцент

Поволжский государственный технологический университет

ВЫБОР СПОСОБА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВЫ

***Аннотация.** Рассматриваются два самых распространенных способа: «Архитекторов» и координатной сетки. Сравниваются изображения, полученные этими способами. Даются рекомендации по их использованию.*

***Ключевые слова:** перспектива, способ «Архитекторов», способ прямоугольных координат.*

Слово «перспектива» французское и означает «насквозь видеть», «внимательно рассматривать». Перспектива рассматривается как наука о построении изображений предметов на поверхности такими, как их воспринимает глаз человека. Изображение, полученное способом центрального проецирования объекта на плоскости, называется линейной

перспективой [1]. Линейная перспектива рассматривает способы изображений контуров предмета на вертикальную и наклонную плоскость, т. е. передаёт линейное очертание предмета. В зависимости от формы и расположения объекта, а также от задачи, стоящей перед проектировщиком, необходимо подобрать способ построения наглядного изображения. Рассмотрим два самых распространённых способа: «Архитекторов» и координатный.

Способ «Архитекторов», который рекомендуется использовать для построения центральных проекций зданий и сооружений, и способ прямоугольных координат – для изображения в перспективе заполненных предметами пространств и объектов неправильной геометрической формы. Оба способа основаны на свойствах центрального проецирования. В «архитектурном» – точки и линии строятся с помощью пучков горизонтальных прямых, имеющих точки схода на линии горизонта. Вертикальные размеры определяются с помощью масштаба высот. Используя этот способ, для каждого элемента приходится выполнять множество построений, что существенно загромождает чертёж, постоянно помнить о масштабности и пропорциональности. Способ «архитекторов» требует хорошего знания теории построения перспективы и большого объёма практической работы. На рис. 1 построено перспективное изображение объекта этим способом. Цилиндрическое сооружение на картине соответствует нашему зрительному восприятию в натуре.

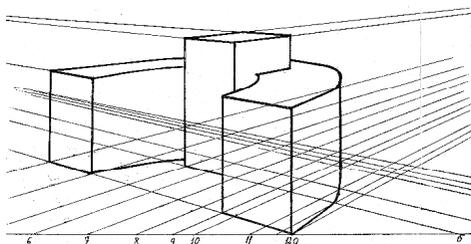


Рис. 1

В построении аксонометрического изображения и изображения объекта в перспективе способом прямоугольных координат есть много общего, что позволяет лучше освоить этот способ, понять, его сущность. Построение точек и линий по координатам X , Y , Z изучают еще в школе, эти приемы построения знакомы учащимся.

Способ прямоугольных координат основан на построении в перспективе координатных осей, которые и определяют положение предмета в заданном пространстве. Изображение объекта строят по коорди-

натам так же, как и в аксонометрии. Для построения перспективы заданного пространства на план и фасад наносят оси прямоугольной системы координат таким образом, чтобы картинная плоскость совпадала с координатной плоскостью XOZ , а предметная плоскость – с координатной плоскостью $ХОУ$. Ось Z называют масштабом высот, ось Y – масштабом глубин. По осям X и Z откладывают натуральные единицы измерения. Ось Y уходит в глубину картины к линии горизонта, единицы измерения по мере удаления от зрителя уменьшаются. Искажение единичного отрезка зависит от дистанционного расстояния и определяется простым графическим построением [2].

Координатный способ удобен для построения перспективы интерьеров помещений, имеющих небольшой объём и многочисленные предметы обстановки. Для удобства определения координат на плоскости XU наносят координатную сетку. Сторона квадратной ячейки принимается равной 1 м. Это даёт возможность представить весь заданный объём помещения, разбитым на модульные кубики, в которых стоят все предметы обстановки. Координатная сетка также поможет точно и быстро изобразить в перспективе паркет, окружности и другие кривые линии, используемые в интерьере помещений. На рис. 2 изображён тот же цилиндрический объект, построенный в координатной сетке. Картина содержит явное искажение формы.

Сетку с квадратными ячейками можно также использовать для построения способом «архитекторов» фронтальной и угловой перспективы.

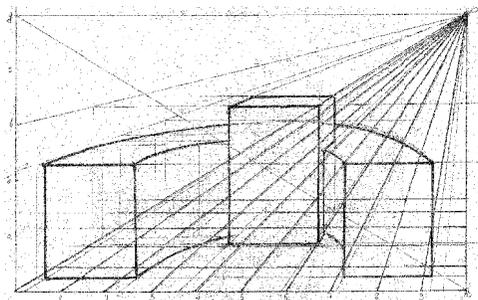


Рис. 2

При построении перспективы ландшафта используется способ прямоугольных координат. Нанесённая на план озеленения участка координатная сетка даёт возможность построить изображение рельефа местности, используя высотные отметки в узлах сетки, и точно расположить элементы озеленения в перспективе, не искажая масштабы объек-

тов. Для этих целей разрабатываются специальные форматы с готовыми осями координат в перспективе и координатной сеткой

Способ прямоугольных координат можно использовать для реставрации перспективных изображений. Например, определение натуральной величины отрезка прямой общего положения. Рассматриваемый способ удобен ещё и тем, что на стадии проектирования можно убирать и добавлять предметы, менять их местами, т. е. вносить все необходимые изменения непосредственно на перспективном изображении.

Такая универсальность способа прямоугольных координат позволяет студентам разных специальностей использовать его не только, выполняя графические задания по начертательной геометрии, но в курсовом и дипломном проектировании. Для промежуточных проектировочных решений можно использовать форматы с нанесённой координатной сеткой, что позволит существенно сократить время построения наглядных проекций. Для построения прямолинейных зданий и сооружений лучше использовать способ «Архитекторов».

Литература

1. Перспектива: учебное пособие для студ. пед. инст-в по худож.-граф. спец. / М. Н. Макарова. – М.: Просвещение, 1989. – 191 с.
2. Наглядные проекции в архитектурном проектировании: учебное пособие / И. А. Фоминых. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2007. – 96 с.

УДК 004.928

Кахаров Ж. Ф.

Научный руководитель: Бакулина И. Р., канд. техн. наук, доцент.
Поволжский государственный технологический университет

СОЗДАНИЕ АНИМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СОЕДИНЕНИЯ ШПИЛЬКОЙ В СРЕДЕ КОМПАС-3D

Аннотация. Рассматриваются этапы создания анимационной трехмерной модели в среде КОМПАС-3D на примере шпильчатого соединения.

Ключевые слова: *трехмерное моделирование, КОМПАС-3D, анимация.*

Начертательная геометрия и инженерная графика требуют от нас пространственного представления и видения изображенной фигуры на чертеже, умения читать чертежи и изображать любую геометрическую

фигуру в проекциях. Трехмерная модель позволяет наглядно увидеть и рассмотреть заданную фигуру со всех сторон, делает доступным восприятие и решение сложных позиционных и метрических задач, позволяет изучать простые и сложные геометрические модели и машиностроительные детали. Визуализация отлично демонстрирует внутреннее устройство изделия и принцип его работы [1].

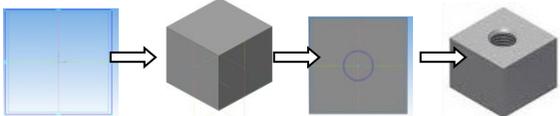
Целью работы являлась разработка демонстрационных материалов для активизации учебно-творческой деятельности студентов.

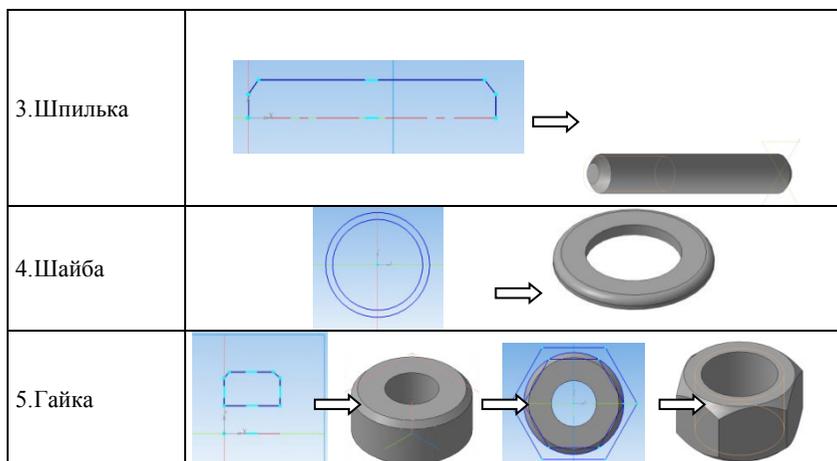
Поставленные задачи: разработать трехмерные модели деталей, входящие в сборочную единицу; визуализировать принцип работы соединения.

Распространённой программой, облегчающей труд инженеров с помощью автоматизированных систем построения чертежей, является пакет «КОМПАС-3D». Эта программа позволяет с помощью различных геометрических примитивов строить чертежи достаточно сложных деталей и конструкций, быстро создавать спецификации и т. д. [3]. Процесс твердотельного моделирования увлекателен для студента и помогает развить пространственное воображение.

Трехмерная твердотельная модель создается в результате последовательного выполнения операций объединения, вычитания и пересечения над простыми объемными элементами (призмами, цилиндрами, пирамидами и т. д.), из которых и состоит большинство реальных деталей.

На первом этапе создания модели сборки «Соединение шпилькой» необходимы модели пяти деталей: корпус, крышка, шпилька, шайба, гайка, поэтому нужно предварительно эти модели создать и записать в файлы с соответствующими названиями. Результат применения формообразующих операций, с помощью которых были созданы модели деталей, входящих в сборку «Соединение шпилькой» представлен в таблице.

Наименование деталей	Результаты применяемых формообразующих операции
1. Корпус	
2. Крышка	



Следует отметить, что для ускорения разработки 3D-моделей сборок, содержащих типовые и стандартизованные детали (элементы крепежа, подшипники, пружины и т. д.), удобно применять готовые параметрические библиотеки.

Соединение шпилькой выполняется так: шпильку резьбовым посадочным концом заворачивают в отверстие корпусной детали. Затем в присоединяемую деталь надевают шайбу. После этого на шпильку надевают гайку и навинчивают гайку.

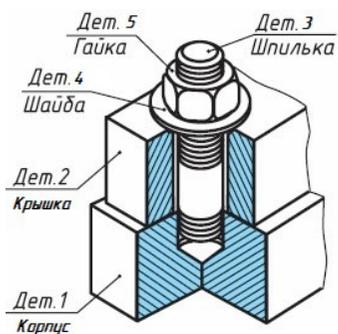


Рис. 1. Соединение шпилькой



Рис. 2. Созданная трехмерная модель соединения шпилькой

После вставки компонентов в сборку можно задать их приблизительное положение и ориентацию в ней. В системе предусмотрено несколько способов перемещения компонентов сборки: поворот вокруг центра его габаритного параллелепипеда, вокруг оси или вокруг точки, а также сдвиг в любом направлении. После того как в сборке будут созданы все компоненты, задается их точное положение в сборке за счет формирования сопряжений между компонентами. Результат работы показан на рис. 2.

Выполнение данного творческого задания способствует повышению познавательной активности студента и развивает интерес к изучаемому предмету.

Литература

1. Новицкая, Е. А. Использование 3D-моделей в обучении начертательной геометрии и инженерной графики [Электронный ресурс]: наглядное пособие для студентов строительных специальностей / Е. А. Новицкая; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Инженерная графика строительного профиля». – БНТУ, 2011.
2. Талалай, П. Г. КОМПАС-3D V9 на примерах [Текст] / П. Г. Талалай. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 592 с.
3. <http://kompas.ascon.ru>.

УДК 515.2

Обухова Я. О.

Научный руководитель: Моисеева О. А., канд. пед. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА СОЗДАНИЯ МОДЕЛИ ДЕТАЛИ «КОРПУС» В КОМПАС-3D v17

***Аннотация.** В статье предлагается один из вариантов создания 3D модели детали в программе Компас3D.*

***Ключевые слова:** 3D модель, чертеж, анализ геометрической формы предмета, система автоматизированного проектирования.*

При разработке 3D моделей и чертежей деталей студенты сталкиваются с рядом трудностей. Часто эти трудности связаны не с отсутствием навыков работы с графическим редактором, а с недостаточно развитым

пространственным мышлением, неумением разложить сложную форму на простые составляющие и выделить последовательные этапы создания.

Модель одной и той же детали может быть создана разными способами. В данной работе предлагается один из рациональных вариантов создания детали, представленной на рис. 1.

Первый этап (подготовительный) создания 3D моделей – это анализ геометрической формы. На подготовительном этапе нужно внимательно ознакомиться с конструкцией детали, мысленно разделить деталь на простейшие геометрические формы (цилиндр, конус, призма и т. д.), определить имеющиеся у неё конструктивные элементы (отверстия, фаски, выступы и т. п.), определить, как все эти формы и элементы связаны между собой, собраны воедино [2]. Анализ формы наглядно представлен на рис. 2. Форма данной детали сложная и представляет собой сумму цилиндрической поверхности (поз. 1) и призматических поверхностей (четырёхугольная (поз. 2) и треугольная (поз. 3) призмы).

Данная деталь имеет вырезы и отверстие. Через центр детали проходит сквозное призматическое отверстие, а цилиндрический элемент имеет два симметричных призматических выреза.

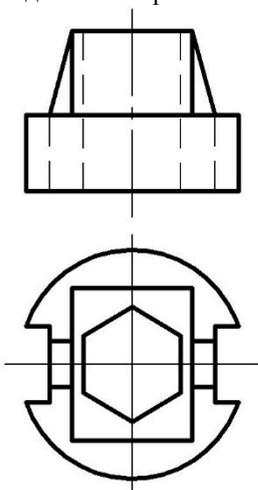


Рис. 1. Исходные данные

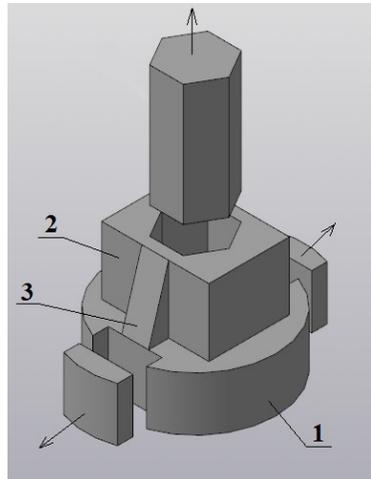


Рис. 2. Анализ геометрической формы

Второй этап – создание рабочей среды. Для этого необходимо открыть программу КОМПАС, создать документ «Деталь» (файл – создать – деталь). В открывшемся окне новой детали выбираем начальную ориентацию модели «Изометрия». От выбора начальной ориентации будет зависеть ориентация детали в пространстве при выборе одной из стан-

дартных операций. Затем задаем свойства модели (управление – свойства модели): вводим обозначение, наименование детали, выбираем материал детали и создаем объект. Имя детали создается автоматически, так как уже введено название и обозначение. При сохранении заполняются поля автора и организации. Далее приступают к созданию самой модели детали.

Опираясь на результаты первого этапа, на третьем этапе создаются базовые элементы 3D модели. К базовым элементам данной детали относятся цилиндр и призмы (рис. 2). Приступаем к созданию цилиндрического основания детали. Выбираем в ориентации «вид сверху», а в «древе» – плоскость xz , во всплывающем окне включаем команду «эскиз». В режиме «эскиза» становятся активными инструменты «геометрии». С помощью инструментов окружность, дуга, отрезок создается плоский контур.

Инструментом «элемент выдавливания» создаем первый базовый элемент корпуса.

В плоскости верхнего основания этого элемента создаем эскиз центральной призмы, используя операцию выдавливания, создаем четырёхугольную призму высотой 50 мм.

Для создания ребер жесткости в плоскости yz создаем эскизы в виде треугольников. Применяв операцию выдавливания «симметрично» на 10 мм получили результат (рис. 3).

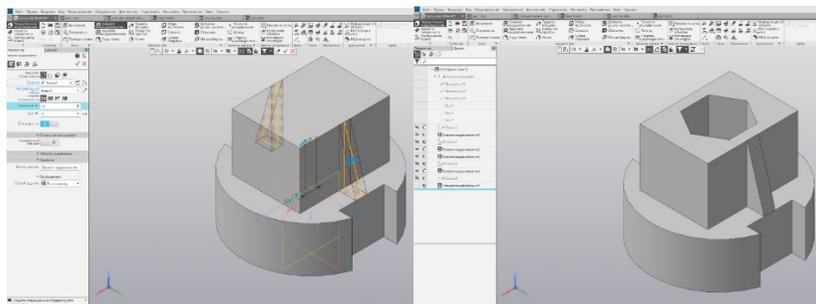


Рис. 3. Создание ребер жесткости

Рис. 4. Модель детали «Корпус»

В центре детали выполнено отверстие в форме шестиугольной призмы. Для его создания в плоскости верхнего основания четырёхугольной призмы формируем эскиз и, используя операцию «вырезать выдавливанием» на глубину 90 мм, образуем отверстие. Модель детали готова.

Данную модель можно было создать, используя другие операции и последовательность, но описанный способ позволяет использовать наименьшее количество операций. Создание 3D моделей способствует формированию пространственного мышления и требует творческого подхода.

Литература

1. КОМПАС 3D v17 Руководство пользователя // режим доступа: https://kompas.ru/source/info_materials/2018/KOMPAS-3D-v17_Guide.pdf (дата обращения 05.03.2019).
2. Лагерь, А. И. Инженерная графика [Текст]: учебник для инж.-техн. спец. вузов / А. И. Лагерь, Э. А. Колесникова. – М.: Высшая школа, 1985. – 176 с.

УДК 515.2

Ратов Д. Д.

Научный руководитель: Полушина Т. А., доцент

Поволжский государственный технологический университет

ЧТЕНИЕ ЧЕРТЕЖА

Аннотация. Рассмотрены основные методы и этапы чтения чертежа.

Ключевые слова: чтение чертежа, деталь, эскиз, геометрические тела, основная надпись.

Чтение чертежа – это задача, которая требует от инженера понять форму детали или сборочной единицы, ее назначение, конструкционные особенности, взаимное расположение частей изделия.

Чтобы читать чертеж было проще, необходимо придерживаться плана (некоторой последовательности):

1. следует ознакомиться с основной надписью, прочитать название, узнать масштаб, в котором выполнен чертеж, установить материал, из которого выполнено изделие;
2. определить, какой вид на чертеже является главным;
3. установить назначения и принципы действия;
4. с учетом всех размеров понять форму и представить, как будет выглядеть изделие в объемном виде.

Последний пункт является наиболее трудоемким, так как требует определенного навыка. Задача заключается в том, чтобы, глядя на плос-

кий чертеж, суметь быстро представить, как будет выглядеть деталь в трехмерном пространстве. Для развития данного навыка рекомендуется использовать следующие методы.

Первый метод. Расчленение детали.

Каждую деталь можно упростить и представить, как совокупность простых геометрических тел. Поэтому необходимо уметь разделить деталь на простые для восприятия составляющие. Готовая деталь изображена на рис. 1, а. На рис. 1, б показан пример расчленения детали на простые составляющие.

Второй метод. Выполнение эскизов.

Эскизом является временный чертеж, выполненный в произвольном масштабе, от руки, без использования чертежных принадлежностей. Эскиз отличается от чертежа только оформлением, поэтому остальные правила выполнения остаются неизменными.

Процесс создания эскиза можно поделить на этапы.

Этап №1. – Планирование эскиза.

Сначала необходимо рассмотреть деталь, желательно узнать ее название, назначение, материал, сведения об обработке поверхностей. Подумать о главном виде и общем количестве видов, необходимости разрезов и сечений.

Главный вид должен нести в себе наибольший объем информации о форме будущей детали.

Выбирается приблизительный масштаб и соответственно формат листа.

Опираясь на собранные данные, чертится рамка и в тонких линиях отмечаются габариты будущих видов (рис. 2, а).

Этап №2. – Оформление изображений.

Соблюдая проекционную связь, выполняются видимые контуры детали, отображают сечения и разрезы, затем в соответствии с материалом делают штриховку (рис. 2, б).

Этап №3. – Нанесение размерных линий и прочих обозначений.

Размерные линии должны находиться за пределами контура детали. Количество размеров должно быть минимальным. Проставленный размер, обозначенный на одном виде, не должен повторяться на остальных

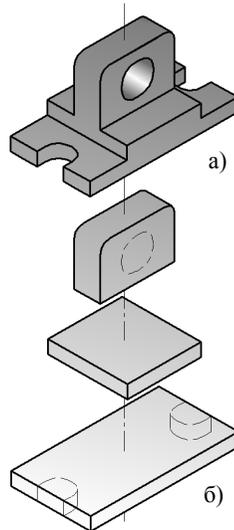


Рис. 1

видах. Для некоторых поверхностей наносят обозначения шероховатостей и различные допуски (рис. 2, в).

Этап №4. – Окончательное оформление.

На заключительном этапе производится замер детали и на эскиз наносят размерные числа, обводят контур детали и заполняют основную надпись (рис. 2, г).

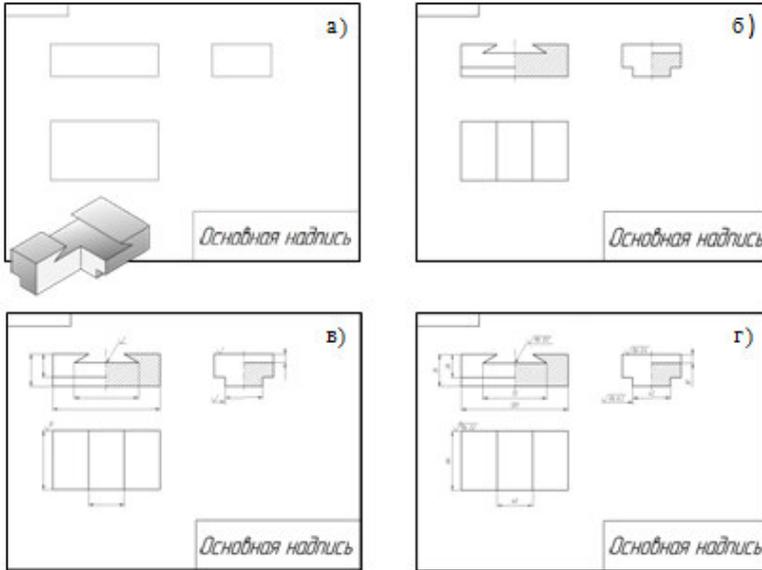


Рис. 2

Третий метод. Деталирование.

Создание чертежей отдельных частей сборочной единицы или узла называется – деталированием. Порядок выполнения деталирования схож с выполнением эскиза.

Литература

1. Бабулин, Н. А. Построение и чтение машиностроительных чертежей / Особенности и методы чтения чертежей: учеб. пособие для для профессионального обучения рабочих на пр-ве. – 8 изд., перераб. – М.: Высш. шк. 1987. – С. 23-30.
2. Нанесение размеров и предельных отклонений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://graph.power.nstu.ru/wolchin/umm/eskd/eskd/GOST/2_307.htm#b.

3. Учебные материалы для студентов. Порядок чтения чертежа. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://studme.org/35904/tovarovedenie/poryadok_chteniya_chertezha.

4. Файловый архив студентов. Особенности выполнения сборных чертежей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfiles.net/preview/2179791/page:2/>

5. Чекмарев, А. А. Инженерная графика. Машиностроительное черчение: учебник / А. А. Чекмарев. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 396 с.

УДК 515.2

Рязанов Д. А.

Научные руководители: Моисеева О. А., канд. пед. наук, доцент;

Бакулина И. Р., канд. тех. наук, доцент

Поволжский государственный технологический университет

РАЗРАБОТКА ВИРТУАЛЬНОГО ТРЕНАЖЕРА «ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ»

***Аннотация.** Представлен виртуальный тренажер для формирования знаний о процессе получения проекций геометрических тел и умений по проекциям определять тело.*

***Ключевые слова:** виртуальный тренажер, проецирование геометрических тел, проекция, межплатформенная среда Unity, технологии OpenGL.*

Виртуальная реальность сегодня – это не только компьютерные игры и развлечения. Она вошла во многие сферы деятельности человека, и в образование в том числе. С виртуальными лабораториями и тренажерами процесс обучения становится более безопасным, доступным и эффективным. Виртуальные тренажеры способны имитировать реальные условия и наглядно представить многие реальные процессы.

На начальном этапе изучения метода проецирования геометрических тел и образования комплексного чертежа многие обучающиеся сталкиваются с трудностями восприятия и понимания образов проекций геометрических тел и их расположения. Опираясь на теорию «Конуса обучения» Эдгара Дейла [3], мы предположили, что если визуализировать процесс получения проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости и преподнести это в виде игры, то этих трудностей можно избежать. Так появилась идея создания тренажера «Проекция геометрических тел».

Виртуальный тренажер «Проекции геометрических тел» – это интерактивное приложение, цель которого – сформировать у обучающихся знания о процессе получения проекций геометрических тел и умения по проекциям узнавать само тело. Виртуальный тренажер может быть использован как с жесткого носителя, так и встроен в электронный курс платформы MOODLE.

Тень от предмета есть проекция, поэтому для создания реалистичной картинке использовали тени на три стенки, полученные с помощью параллельного прямоугольного проецирования (т. е. подсвечивали предмет с трех разных сторон). При работе в данном приложении перед обучающимся появляется картинка, на которой представлены тени какого-то геометрического тела, само тело находится в центре, но скрыто. Обучающемуся необходимо определить, какое геометрическое тело может «отбрасывать» такие тени и выбрать правильный ответ (рис. 1.). Если выбор правильный, то в центре открывается наглядное изображение фигуры (рис. 2.). При захвате фигуры курсором и изменении его положения относительно стенок изменяются тени (рис. 3.). Данная манипуляция дает возможность пронаблюдать, как изменяются проекции тела в зависимости от изменения его положения относительно плоскостей проекций. Одна сессия тренажера состоит из 9 заданий.

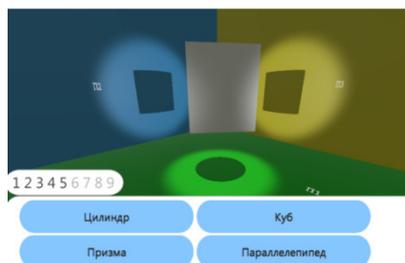


Рис. 1

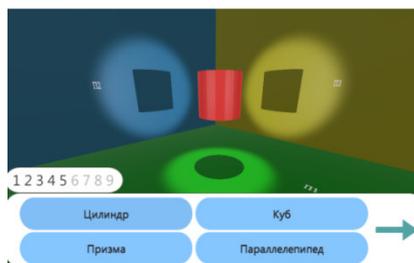


Рис. 2

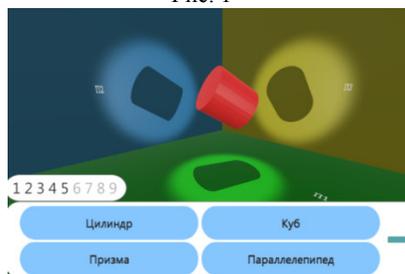


Рис. 3

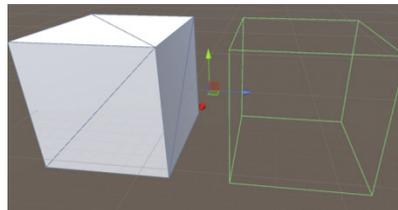


Рис. 4

Для создания геометрических тел использовали среду Blender. Blender – профессиональное свободное и открытое программное обеспечение для создания трёхмерной компьютерной графики, включающее в себя средства моделирования, анимации, рендеринга, постобработки и монтажа видео со звуком, компоновки с помощью «узлов» (Node Compositing), а также для создания интерактивных игр. В настоящее время пользуется наибольшей популярностью среди бесплатных 3D-редакторов в связи с его быстрым и стабильным развитием, которому способствует профессиональная команда разработчиков [1].

Для создания приложения использовали межплатформенную среду разработки компьютерных приложений Unity, которая позволяет создавать приложения, работающие на более чем 20 различных операционных системах. Эта среда позволяет легко взаимодействовать с 3D-моделями для представления их в браузере и использование технологии OpenGL. OpenGL (Open Graphics Library) – спецификация, определяющая платформонезависимый (независимый от языка программирования) программный интерфейс для написания приложений, использующих двумерную и трёхмерную компьютерную графику [2]. Так как проект не является коммерческой продукцией – лицензия на Unity не требуется.

Для создания изображений теней от отображаемого объекта, «рассставляли» 3 point light по 3-ём плоскостям. Благодаря этому приему, при вращении объекта также изменялась и его проекция. Для вращения каждому объекту построили кубический коллаيدر вместо коллайдера по сетке объекта (рис. 4). Таким образом, мы уменьшили затраты по производительности для сложных объектов и увеличили область для взаимодействия.

Рекомендуем использовать данную разработку при изучении черчения в общеобразовательных школах и средних профессиональных образовательных учреждениях.

Литература

1. Blender. Материал из Википедии // режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Blender> (дата обращения 05.03.2019).
2. OpenGL. Материал из Википедии // режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/OpenGL> (дата обращения 05.03.2019).
3. О профессоре ДЕЙЛЕ, его «конусе опыта» и «пирамиде обучения», предложенной его последователями // режим доступа: <http://www.openlesson.ru/?p=16822> (дата обращения 05.03.2019).

Сабанцева А. А., Казакова Д. Г.

Научный руководитель: Бакулина И. Р., канд. техн. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ В СИСТЕМАХ ЕСКД, ISO, ANSI

Аннотация. Рассматриваются различия и особенности оформления конструкторской документации по стандартам ЕСКД, ISO, ANSI.

Ключевые слова: международные стандарты, оформление чертежей, расположение видов, европейская система, американская система.

Конструкторская документация – графические и текстовые документы, которые определяют состав и устройство изделия и содержат необходимые данные для его разработки, изготовления, контроля, эксплуатации, ремонта и утилизации [2].

Единая система конструкторской документации (ЕСКД) – комплекс государственных стандартов, устанавливающих взаимосвязанные правила, требования и нормы по разработке, оформлению и обращению конструкторской документации. Эти нормы и правила распространяются на документацию, разработанную предприятиями и предпринимателями (субъектами хозяйственной деятельности) стран-участников соглашения (СНГ), в том числе научно-техническими, инженерными обществами и другими общественными объединениями.

Стандарт ISO является международным набором правил и требований. Существуют общие стандарты по всем направлениям бизнеса. Для оформления проектной документации в различных отраслях промышленности также разработаны свои специализированные стандарты ISO.

ANSI – это документ, опубликованный Американским институтом стандартов, утверждённый после публичного обзора, обсуждения и получения всеобщего одобрения. Каждый такой стандарт должен был быть разработан комитетом ANSI и обновлён каждые пять лет.

В перечисленных системах есть свои особенности оформления чертежей, хотя с развитием рыночной экономики прослеживается тенденция к унифицированию.

Стандарты систем ЕСКД и ISO, содержащие требования к оформлению чертежей приведены в таблице.

Стандарты ЕСКД	Стандарты ISO
<ul style="list-style-type: none"> ГОСТ 2.301 – 68 Форматы ГОСТ 2.302 – 68 Масштабы ГОСТ 2.303 – 68 Линии ГОСТ 2.304 – 81 Шрифты чертежные ГОСТ 2.305 – 2008 Изображения – виды, разрезы, сечения ГОСТ 2.307 – 2011 Нанесение размеров 	<ul style="list-style-type: none"> ISO 216 Размеры листа ISO 128 – 44:2001 Чертежи технические. Основные принципы изображения. Часть 44. Сечения на машиностроительных чертежах ISO 128 – 23:1999 Чертежи технические. Основные принципы изображения. Часть 23. Линии на строительных чертежах. ISO 128 – 34:2001 Чертежи технические. Основные принципы изображения. Часть 34. Виды на машиностроительных чертежах

Международный стандарт размеров листов ISO 216 построен на основе немецкого стандарта размеров листов DIN 476 [3]. В стандарте ISO 216 отношение ширины к длине листов составляет $\sqrt{2}$, или 1:1,4142. Базовым форматом листа является A0, площадь которого равна 1 м². Каждый из следующих форматов листов (A1, A2 и т. д.), имеет вдвое меньшую площадь, чем предыдущий. Аналогично, по ГОСТ 2.301-68 эти форматы имеют название «основные форматы».

Из стандарта ГОСТ 2.305 – 2008 известно, что изображения на чертеже выполняются по способу (методу) прямоугольного проецирования. При этом за проецируемым предметом располагается непрозрачная плоскость проекций (рис. 1).

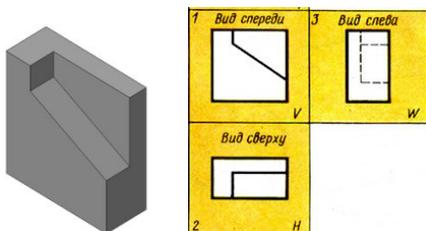


Рис. 1. Расположение видов по европейскому методу

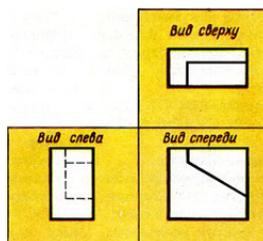


Рис. 2. Расположение видов по американскому методу

При американском методе между наблюдателем и предметом находится прозрачная плоскость проекций, а проецирующие лучи направлены на наблюдателя. Плоскость проекции расположена между глазами наблюдателя и изображаемым предметом. Соответственно, при этом меняется взаимное расположение проекций (рис. 2).

На чертежах, выполненных в Европе по американским правилам оформления, помещают специальный знак в виде двух проекций усеченного конуса. Документ, выполненный в США по европейскому методу, также снабжается специальным знаком, представляющим собой те же две проекции усеченного конуса, но по-другому расположенные относительно друг друга (рис. 3).

На рис. 4 показаны примеры нанесения размеров на чертежах США. Следует отметить, что все размерные числа и надписи всегда располагают параллельно основной надписи и в разрывах размерных линий. При недостатке места размерные числа выносят за выносные линии и размещают так, что продолжения размерных линий или полки линий-выносок упираются в них.

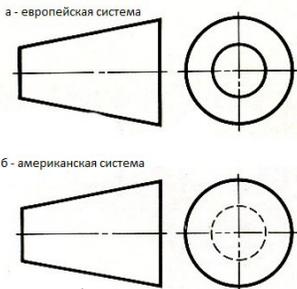


Рис. 3. Знаки, указывающие на метод выполнения чертежа

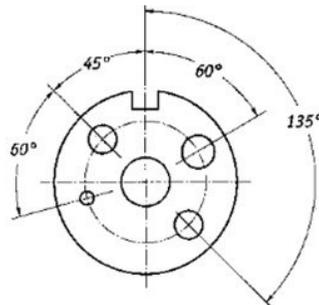


Рис. 4. Фрагмент чертежа, выполненного по стандартам США

Результаты исследования, выполненного с учащимися одной из российских школ, показали, что европейская система проецирования для обучающихся отечественных школ и вузов более приемлема для восприятия и понимания [1]. Людям с плохо развитым пространственным воображением сложнее, на взгляд авторов, использовать американскую систему. В большинстве стран мира чертежи оформляются по европейским правилам или очень близким к ним.

Литература

1. Константинов, В. В. Исследование «американской» и «европейской» систем проецирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elearning.hse.ru/psychometrics/handbook/part5>, свободный.
2. Оформление конструкторской документации в разных странах: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lucad.net/ru/stati/>, свободный.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Engineering_drawing.

Эгамбердиев И. И. угли
Научный руководитель: Моисеева О. А., канд. пед. наук, доцент
Поволжский государственный технологический университет

СОЗДАНИЕ АНИМАЦИИ ПРОЦЕССА СБОРКИ СБОРОЧНОЙ ЕДИНИЦЫ «ГОЛОВКА ВЕНТИЛЬНАЯ»"

Аннотация. В статье рассматривается процесс создания сборки и анимации сборочной единицы «Головка вентильная» в КОМПАС 3Dv17.

Ключевые слова: САПР, КОМПАС 3D, моделирование, анимация.

Стремительное развитие технологий позволяет сегодня имитировать в виртуальной среде различные опасные, дорогостоящие и долговременные технологические процессы, что позволяет избежать ошибок на практике и предупредить необратимые процессы. Благодаря 3D компьютерной графике все эти процессы можно визуализировать. 3D визуализация является стандартной функцией в системах автоматизированного проектирования. Рассмотрим возможности визуализации и анимации программы КОМПАС 3D на простом примере создания сборки и анимации сборочной единицы «Головка вентильная».

Многие студенты, изучая инженерную графику, выполняют графическую работу «Головка вентильная» в карандашной графике. В работу входят выполнение эскизов деталей сборочной единицы и сборочного чертежа «Головка вентильная». В КОМПАС 3D по разработанным эскизам достаточно просто разработать 3D модели деталей (рис. 1-3), а имея их, перевести в 2D и создать чертежи. Создание 3D сборки также требует наличия 3D моделей всех деталей, входящих в сборочную единицу (рис. 4).

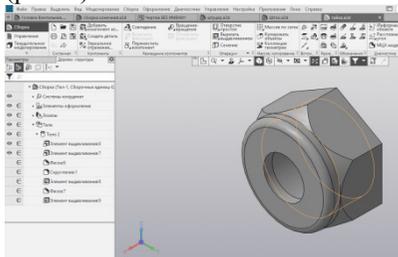


Рис. 1. Гайка накидная

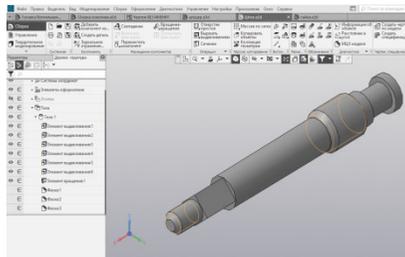


Рис. 2. Шток

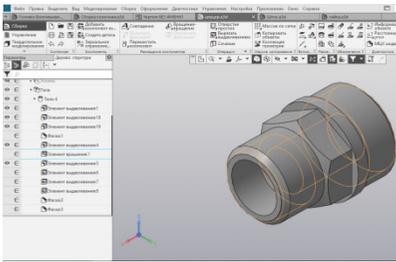


Рис. 3. Штуцер

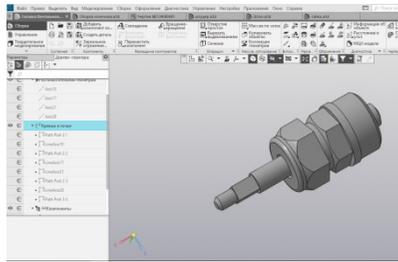


Рис. 4. Головка вентильная

Имитирование процесса сборки-разборки головки вентильной возможно в приложении «Механика: Анимация». Для его подключения в 17 версии необходимо открыть вкладку «Приложение», выбрать «Добавить приложение», в открывшемся окне выбрать Animation3D → Animat. Приложение работает только с документом КОМПАС-3D – трехмерная модель сборки (*.a3d).

Открываем созданный ранее документ «Головка вентильная» (*.a3d). Приступаем к анимации. Для этого во вкладке «Приложения» необходимо выбрать «Механика» → «Механика: Анимация» (рис. 5). В открывшемся окне создаем сценарий анимации. При создании анимации к компонентам сборки «Головки вентильной» целесообразно применять действия: вращение компонента вокруг оси; перемещение элементов сборки по траектории. Все отдельные перемещения компонентов сборки разбиты на четыре шага (рис. 6).

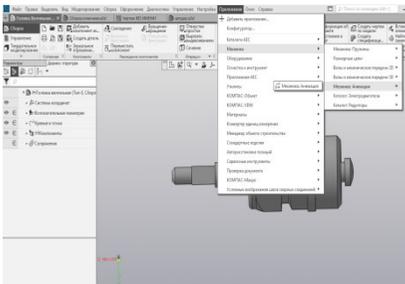


Рис. 5. Запуск приложения «Анимация»

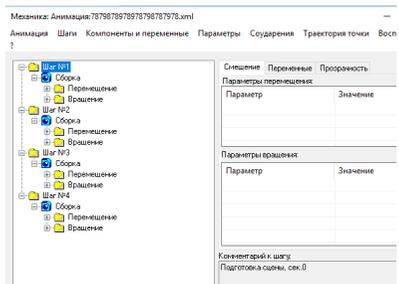


Рис. 6. Сценарий анимации

Шаг 1 возникает в сценарии анимации по умолчанию. Добавляем первый компонент, который будет подвергаться перемещению. В меню «Компоненты и переменные» выбираем пункт «Добавить компоненты» в дереве сборки. Выбираем в дереве построения штуцер (элемент в окне

сборки подсвечивается красным цветом) и нажимаем «Ок». Также элемент можно выбрать в окне модели, нажав, к примеру, на любую из его граней. Штуцер появляется в дереве анимации в соответствующем шаге. Чтобы построить траекторию, необходимо выделить в дереве анимации штуцер и войти в меню «Параметры». Выбираем пункт «Добавить траекторию» в дереве сборки и указываем в окне сборки левой клавишей мыши отрезок. В появившемся окне настраиваем направление (прямое или обратное), скорость перемещения или время, за которое штуцер должен пройти данный путь. Добавляем второй шаг и повторяем процедуру первого шага относительно компонента сборки «Гайка накидная». Третий и четвертый шаги реализуют обратный процесс (разборки) головки вентильной.

После создания сценария (дерева) анимации можно воспроизвести движение механизма. Для этого надо выполнить команду меню «Воспроизведение». В этой команде имеются опции: «на текущем шаге» - будет воспроизведено движение тех компонентов, которые выбраны на текущем шаге (выделенном в дереве анимации); «полное» – будет воспроизведена вся анимация. После выполнения этих команд на экране появляется управляющая панель с кнопками «Пуск» («>») «Стоп», «Пауза» («||») и «Создавать видеоролик». При нажатии кнопки «Создать видеоролик», при запуске воспроизведения начнется параллельная запись ролика в формате AVI. По окончании воспроизведения система предложит выбрать место на диске для сохранения видеофайла и его имени [1].

Анимирование сборки-разборки сборочных единиц помогает быстро разобраться в устройстве изделия и научиться порядку работы.

Литература

1. Механика: анимация. Инструкция по работе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://kompas.ru/source/info_materials/user-manuals/rukovodstvo-polzovatelya-mekhanika-animaciya.pdf (дата обращения 15.03.2019).
2. Оживляя механизмы Работа с анимацией в системе автоматизированного проектирования КОМПАС-3D (часть 1) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://support.ascon.ru/source/articles/SiG_04-2014_animation.pdf (дата обращения 15.03.2019).

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгаева Н. С., *I*, 123
Алексеев А. С., *I*, 102
Алтайбай А. М., *I*, 126
Аманов А. Н., *I*, 129
Андрианов Д. Ю., *I*, 5
Афанасьева Е. В., *I*, 162
Ахметзянова Д. Р., *I*, 132, 179
- Борисова М. К., *I*, 8
Булдакова Ю. М., *I*, 135
Бураков В. А., *I*, 138
- Вавилов А. С., *I*, 123
Ваничев А. К., *I*, 176
Васильев В. Р., *I*, 141
Васильев Е. С., *I*, 10
Васильева О. С., *I*, 181
Волкова М. Ю., *I*, 132, 179
Воробьева Е. Г., *I*, 105
Воронин Д. Е., *I*, 13
Воронцова В. В., *I*, 107
Вязов А. Е., *I*, 144
- Габдуллин М. Р., *I*, 184
Гладырев Д. С., *I*, 187
Гладышева А. А., *I*, 15
Григорьева В. В., *I*, 17, 20
- Девятова Д. А., *I*, 110
Дегтярёв В. Л., *I*, 187
Дмитриева К. В., *I*, 23
Домрачева А. А., *I*, 112
Домрачева С. С., *I*, 208
- Ершов А. С., *I*, 38
- Журавлев Е. А., *I*, 59, 138, 170
- Закрасняя В. И., *I*, 25
- Замятин И. С., *I*, 28
Зверев М. В., *I*, 31
Зыкова А. А., *I*, 190
- Иванов С. П., *I*, 179, 184, 187, 190, 193, 195, 200, 203
Иванов О. Г., *I*, 181
Иванова Е. В., *I*, 34
Иванова А. С., *I*, 195
Иванова Е. С., *I*, 193, 195
Ивличева Е. А., *I*, 162
Ильина Д. А., *I*, 129
Исупова И. А., *I*, 211
- Казакова Д. Г., *I*, 226
Капустин А. В., *I*, 144, 156, 162
Кахаров Ж. Ф., *I*, 214
Колесова А. Д., *I*, 107
Комарова А. К., *I*, 211
Кочергина А. А., *I*, 36
Куликов Ю. А., *I*, 147
Кулагина С. В., *I*, 28, 31, 38, 92, 95
Кудрявцев С. Г., *I*, 135
- Лагерев И. А., *I*, 150
Лаптандер А. М., *I*, 38
Лаптев С. Н., *I*, 153
Лебедев Г. В., *I*, 123
Леухин М. Д., *I*, 115, 173
Лоскутов Ю. В., *I*, 123, 132, 173, 205
Лушниченко Н. С., *I*, 156
Лычко Н. А., *I*, 41
- Малинина М. С., *I*, 44, 47, 50
Мальцева Е. М., *I*, 112
Микакова Д. Е., *I*, 132
Милкова А. А., *I*, 53, 117
Михайлова Н. Ю., *I*, 197

- Михеева П. К., *I*, 115, 147
Мустафина С. С., *I*, 25
Милютина Д. А., *I*, 56
- Обухова Я. О., *I*, 217
Осипов В. И., *I*, 153
Остроухов И. О., *I*, 159
- Пантелеева В. С., *I*, 105
Посошнова К. Д., *I*, 59
- Раджабов В. О., *I*, 62
Ратов Д. Д., *I*, 220
Родникова А. В., *I*, 200
Рязанов Д. А., *I*, 223
- Сабанцева А. А., *I*, 226
Сагетова Г. А., *I*, 64
Садовина Е. А., *I*, 120
Салихова Л. М., *I*, 53, 62, 67
Семякин С. О., *I*, 69
Соколова Ю. А., *I*, 115, 147
Соловьева М. Д., *I*, 162, 164
Солоницын А. А., *I*, 173
Стаценко О. В., *I*, 67
Степанова Е. О., *I*, 72
- Степанова И. Ю., *I*, 75, 78
- Таныгина В. В., *I*, 81
Терентьев Г. В., *I*, 84
Тихонова А. А., *I*, 87
Толстова А. Г., *I*, 90
Трошин А. В., *I*, 92
Трошин Н. В., *I*, 92
- Филимонова А. А., *I*, 203
Филонова М. В., *I*, 59
Флегентова Е. И., *I*, 95
Фролов К. В., *I*, 167
- Химич А. В., *I*, 150
- Чеканов В. С., *I*, 170
Черных И. Н., *I*, 98
Чернышова О. И., *I*, 173, 205
- Шлычков С. В., *I*, 129, 176
Шурыгин С. В., *I*, 176
Щекотова М. И., *I*, 208
- Эгамбердиев И. И. угли, *I*, 229

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
Секция «Математика»	5
Секция «Теоретическая и экспериментальная физика»	102
Секция «Прикладная механика»	123
Секция «Строительная механика и теория сооружений»	179
Секция «Прикладная геометрия и компьютерная графика»	208
<i>Авторский указатель</i>	232

Научное издание

НАУЧНОМУ ПРОГРЕССУ –
ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЫХ

Материалы

*XIV Международной молодежной научной конференции
по естественнонаучным и техническим дисциплинам*

В 4 частях

Часть 1

Отв. за выпуск *Э. В. Унженина*

Компьютерная верстка *Э. В. Унжениной*

Подписано в печать 14.08.19. Формат 60x84^{1/16}.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,72. Тираж 100 экз. Заказ № 3868.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Вертола»
424030, Республики Марий Эл, г. Йошкар-Ола,
ул. Льва Толстого, д. 45.

